

# $m$ を単位球の面積にとると、温度の係数はどの次元でも単位球の体積になる

—  $d = 1$  から  $8$  のすべてで温度の係数は単位球の体積に合い、その正体は球面で方向の成分の二乗を積分した値である — 分離子は、全方向の平均を取るか、横向き of 平均を取るか — [論文912]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月

— From thinking to syncing. —

## 要旨

論文20 は  $m = 4\pi$  から温度を  $kT = (4\pi/3)v^2$  と書き、係数  $4\pi/3$  が単位球の体積であることを「係数として現れる」ところに留めた。本稿は、空間の次元  $d$  を動かして、 $m$  を  $d$  次元の単位球の面積  $S_{d-1}$  に取ったときに、この一致が  $d = 3$  に限られるのか、どの次元でも成り立つのかを数え、成り立つならその正体が何かを示す。新しい定理も法則も主張しない。第一に、温度の係数は、どの次元でも単位球の体積に合う——マクスウェル分布から乱数で温度の係数 ( $kT$  を速さの二乗平均で割った値) を数えると、 $d = 3$  で **4.187827** 対 **4.188790**、 $d = 5$  で **5.264092** 対 **5.263789** で、 $d = 1$  から  $8$  の差はどれも  $20$  組で測った標準誤差の  $1.37$  倍以内だった (第2節)。第二に、これが本稿の芯である。正体は、球面で方向の成分の二乗を積分した値である——発散定理で、この面の積分は単位球の体積に等しい。 $d = 3$  の格子積分では面の側 **4.188790205** と体積の側が差  $1.6 \times 10^{-10}$  で一致し、乱数では  $d = 2$  から  $8$  で標準誤差の  $1.07$  倍以内だった (第3節)。第三に、圧力の係数と、回る球殻のエネルギーの係数も、同じ体積になる—— $d = 3$  で乱数は **4.189485** と **4.189691**、 $m = 4\pi$  の球殻の慣性モーメントは **8.377580** で、その半分の **4.188790** が回転のエネルギーの係数である (第4節)。第四に、 $m$  を  $4\pi$  に固定すると、一致するのは  $d = 3$  だけである——係数  $4\pi/d$  は  $d = 4$  で **3.141593** だが、単位球の体積は **4.934802** である。どの次元でも一致するのは、 $m$  を単位球の面積に選んだからである (第5節)。第五に、横向きの平均を取る量は、単位球の体積の  $d - 1$  倍になる—— $d = 3$  で **8.377580**、 $d = 4$  で **14.804407** で、単位球の体積と一致するのは  $d = 2$  だけだった。ラーモアの公式の  $2/3$  と電磁質量の  $4/3$  はこちらの族に入る (第6節)。第六に、分離子は、全方向の平均を取るか、横向きの平均を取るかである——全方向の平均なら係数はどの次元でも単位球の体積で、その値は  $d = 5$  で最大の **5.263789** になる。横向きの平均なら  $d - 1$  倍で、 $d = 3$  の  $4\pi/3$  と  $8\pi/3$  は二つの族の別の数である (第7節)。キーワード：等分配、単位球の体積、発散定理、マクスウェル分布、空間次元、温度。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——エネルギー等分配則（マクスウェル 1860）、 $d$  次元の単位球の体積が面積の  $1/d$  であること、発散定理、方向の成分の二乗の球面平均が  $1/d$  であることは、いずれも標準的である。温度が体積だとは言わない——温度の次元は速さの二乗であり、論文20 第2版の撤回はそのままである。言うのは係数だけである。質量が面積や立体角だとは言わない—— $m$  を単位球の面積と同じ数に取るのは単位を選択であり、論文60 第2版のとおり、選んだ  $4\pi$  と立体角の  $4\pi$  は別のものである。高次元の気体の実在を主張しない—— $d \neq 3$  の気体は、係数の  $d$  への依り方を見るための数え方である。量子と相対論の補正に入らない——古典的な理想気体の等分配だけを扱う。既刊との関係：論文20 は、 $m = 4\pi$  と等分配から  $kT = (4\pi/3)v^2$  を導き、係数が単位球の体積であることを係数に留めた——ここでは、その一致がどの次元でも成り立ち、正体が球面での方向の二乗の積分であることを数える。論文19 は、 $P = (4\pi/3)nv^2$  の  $4\pi/3$  を三次元の単位球の体積と書いた——ここでは圧力の係数も、同じ積分としてどの次元でも体積になることを数える。論文18 は、 $m = 4\pi$  で運動エネルギーを  $2\pi v^2$  と書いた——ここでは、その係数に  $2/d$  が掛かって温度の係数になり、 $m$  を単位球の面積に取ればそれが単位球の体積になる。論文59 は、単位球の体積が 5 次元で最大になり、その 5 が半径を 1 と置いた帰結であることを示した——ここでは  $m$  を単位球の面積に選ぶと、温度の係数も 5 次元で最大になる。論文905 は、ラーモアの公式の  $2/3$  を方向の平均  $1 - 1/d$  として数えた——ここではそれを横向きの族として、全方向の族と分ける。論文907 は、臨界密度の  $8\pi/3$  を運動エネルギーの  $1/2$  と球の体積の  $4\pi/3$  から出し、同じ  $8\pi/3$  に見える横向きの積分が  $d = 4$  で別の数に分かれることを示した——ここではその横向きの積分が単位球の体積の  $d - 1$  倍であることを使う。論文908 は、電磁質量の  $4/3$  が球の体積ではなく場の向きの平均から来ることを示した——ここでは温度と圧力の  $4\pi/3$  が、逆にどの次元でも球の体積そのものであることを示す。論文902 は、黒体放射の  $4\pi$  を  $k$  空間の単位球の面積と読んだ——ここでは  $m$  を単位球の面積と同じ数に選び、その面の上の積分を数える。加えたのは、 $m$  を単位球の面積にとると温度の係数が  $d = 1$  から 8 で単位球の体積になることを乱数で数えたこと、その正体を球面での方向の二乗の積分として発散定理の両辺で示したこと、圧力と回る球殻が同じ族に入ること数を数えたこと、 $m$  を  $4\pi$  に固定すると一致が  $d = 3$  だけになることを示したこと、分離子を「全方向の平均か、横向きの平均か」に置いたことである。

## 1. 記法と問い

設定： $d$  次元の単位球の面積を  $S_{d-1}$ 、体積を  $V_d$  と書く。

$$S_{d-1} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}, \quad V_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2 + 1)} = \frac{S_{d-1}}{d}$$

$d = 3$  で  $S_2 = 4\pi \cdot V_3 = 4\pi/3$ 、 $d = 1$  で  $S_0 = 2$ （二つの点） $\cdot V_1 = 2$ （長さ 2 の線分）、 $d = 2$  で  $V_2 = \pi$  である。 $d$  次元の理想気体では等分配により一つの方向あたり  $\frac{1}{2}kT$  なので、次のようになる。

$$\left\langle \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle = \frac{d}{2}kT \implies \frac{kT}{\langle v^2 \rangle} = \frac{m}{d} \xrightarrow{m=S_{d-1}} \frac{kT}{\langle v^2 \rangle} = \frac{S_{d-1}}{d} = V_d$$

$d = 3$  ではこれが論文20 の  $kT = (4\pi/3)v^2$  である（ $v^2$  は二乗平均）。検算では、各成分が分散  $kT/m$  の正規分布（マクスウェル分布）から  $10^5$  個の速度を 20 組引いて  $kT/\langle v^2 \rangle$  を数え、20 組のばらつきから標準誤差を測

った。

問い： $m$  を単位球の面積に取ったとき、温度の係数が単位球の体積になるのは  $d = 3$  だけか、どの次元でもか。どの次元でもなら、その正体は何か。

## 2. どの次元でも、単位球の体積になる

計算 2.1： $m = S_{d-1}$  と置いた  $kT/\langle v^2 \rangle$  (乱数) と  $V_d$ 。  $z$  は差を標準誤差で割った値。

| $d$ | $S_{d-1}$ | $V_d$    | $kT/\langle v^2 \rangle$ (乱数) | $z$   |
|-----|-----------|----------|-------------------------------|-------|
| 1   | 2.000000  | 2.000000 | 1.999826                      | -0.12 |
| 2   | 6.283185  | 3.141593 | 3.142312                      | +0.31 |
| 3   | 12.566371 | 4.188790 | 4.187827                      | -0.40 |
| 4   | 19.739209 | 4.934802 | 4.935205                      | +0.14 |
| 5   | 26.318945 | 5.263789 | 5.264092                      | +0.13 |
| 6   | 31.006277 | 5.167713 | 5.164820                      | -1.36 |
| 7   | 33.073362 | 4.724766 | 4.724542                      | -0.17 |
| 8   | 32.469697 | 4.058712 | 4.060158                      | +1.37 |

### 観察 2.2

温度の係数は、 $d = 1$  から  $8$  のすべてで単位球の体積に合う。差はどれも標準誤差の  $1.37$  倍以内で、 $S_{d-1}/d$  と  $V_d$  の差は八つの次元とも  $10^{-12}$  未満だった——論文20 の  $4\pi/3$  は、三次元の偶然ではない。

## 3. 正体は、球面で方向の成分の二乗を積分した値である

設定：単位球面の外向きの単位法線を  $n$  とする。単位球面の上では  $n = x$  なので、場  $F = (x_1, 0, \dots, 0)$  に発散定理を当てると次の等式になる。

$$\oint_{S_{d-1}} n_1^2 dS = \oint_{S_{d-1}} x_1 n_1 dS = \int_{B_d} \frac{\partial x_1}{\partial x_1} dV = V_d$$

向きのそろっていない速度では速さと向きが独立なので  $\langle v_1^2 \rangle = \langle v^2 \rangle \langle n_1^2 \rangle$  であり、等分配  $kT = m \langle v_1^2 \rangle$  から  $kT / \langle v^2 \rangle = m \langle n_1^2 \rangle$  となる。 $m = S_{d-1}$  なら、面積と平均の積は面の積分そのものである。

$$\frac{kT}{\langle v^2 \rangle} = S_{d-1} \langle n_1^2 \rangle = \oint_{S_{d-1}} n_1^2 dS = V_d$$

計算 3.1：面の積分  $S_{d-1} \langle n_1^2 \rangle$ （乱数）と、立方体に点を投げて数えた単位球の体積（乱数）。

| $d$ | 面の積分（乱数） | $z$   | 球の体積（乱数） | $z$   | $V_d$    |
|-----|----------|-------|----------|-------|----------|
| 2   | 3.140273 | −0.92 | 3.140192 | −1.20 | 3.141593 |
| 3   | 4.191567 | +1.07 | 4.189908 | +0.58 | 4.188790 |
| 4   | 4.939248 | +0.99 | 4.937384 | +0.35 | 4.934802 |
| 5   | 5.264264 | +0.13 | 5.253248 | −1.52 | 5.263789 |
| 6   | 5.168169 | +0.12 | 5.176256 | +0.61 | 5.167713 |
| 7   | 4.725843 | +0.25 | 4.718848 | −0.33 | 4.724766 |
| 8   | 4.059469 | +0.23 | 4.087552 | +1.31 | 4.058712 |

乱数によらない格子積分では、 $d = 2$  の  $\oint \cos^2 \varphi d\varphi = 3.141592654$  ( $V_2 = \pi$ )、 $d = 3$  の  $\oint \cos^2 \theta d\Omega = 4.188790205$  ( $V_3 = 4\pi/3$ ) で、 $d = 3$  の体積の側を半径の格子で積んだ 4.188790205 とは差  $1.6 \times 10^{-10}$  だった。

### 観察 3.2

$m$  を単位球の面積に選ぶと、「質量と方向の平均の積」が「球面の上の積分」に変わり、発散定理がそれを体積に変える。等分配の  $1/d$  は方向の二乗の平均、単位球の体積の  $1/d$  は面積との比で、二つは同じ等式の両辺に立っている——面の積分の乱数は標準誤差の 1.07 倍以内、球の体積の乱数は 1.52 倍以内で  $V_d$  に合った。

## 4. 同じ族：圧力と、回る球殻

設定：壁が受ける圧力は  $P = nm \langle v_1^2 \rangle$  なので、係数  $P/(n \langle v^2 \rangle) = m \langle n_1^2 \rangle$  は温度と同じ積分になる。半径  $r$  の薄い球殻を一つの面の中で角速度  $\omega$  で回すと、慣性モーメントは  $I = mr^2 \langle n_1^2 + n_2^2 \rangle$  で、回転のエネルギーは次のようになる。

$$\frac{\frac{1}{2}I\omega^2}{r^2\omega^2} = \frac{1}{2} m \langle n_1^2 + n_2^2 \rangle = m \langle n_1^2 \rangle \xrightarrow{m=S_{d-1}} V_d$$

計算 4.1：  $m = S_{d-1}$  と置いた圧力の係数と回る球殻の係数（どちらも乱数）。

| $d$ | 圧力の係数    | $z$   | 回る球殻の係数  | $z$   | $V_d$    |
|-----|----------|-------|----------|-------|----------|
| 2   | 3.143941 | +1.00 | 3.141593 | +0.00 | 3.141593 |
| 3   | 4.189485 | +0.20 | 4.189691 | +0.90 | 4.188790 |
| 4   | 4.930971 | -0.81 | 4.931856 | -1.29 | 4.934802 |
| 5   | 5.270911 | +1.41 | 5.267303 | +1.33 | 5.263789 |
| 6   | 5.175761 | +1.42 | 5.174199 | +2.81 | 5.167713 |
| 7   | 4.725018 | +0.06 | 4.726354 | +0.62 | 4.724766 |
| 8   | 4.056544 | -0.51 | 4.059057 | +0.14 | 4.058712 |

#### 観察 4.2

圧力の係数と回る球殻の係数も、単位球の体積に合う。 $d = 2$  の球殻は回る面が全方向なので値にばらつきが無く、ちょうど **3.141593** だった—— $d = 3$  で  $m = 4\pi$  の球殻の慣性モーメントは **8.377580** で、半分の **4.188790** が回転のエネルギーの係数である。 $d = 4$  では回る面の二成分で  $I = 9.869604$ 、軸に垂直な成分で数えれば **14.804407** で、三次元でだけ二つが同じ二成分になって区別がつかない。

## 5. $m$ を $4\pi$ に固定すると

計算 5.1：  $m = 4\pi$  を次元によらず固定したときの係数  $4\pi/d$  と、 $V_d$ 。

| $d$ | $4\pi/d$  | $V_d$    |
|-----|-----------|----------|
| 1   | 12.566371 | 2.000000 |
| 2   | 6.283185  | 3.141593 |
| 3   | 4.188790  | 4.188790 |
| 4   | 3.141593  | 4.934802 |
| 5   | 2.513274  | 5.263789 |
| 6   | 2.094395  | 5.167713 |
| 7   | 1.795196  | 4.724766 |
| 8   | 1.570796  | 4.058712 |

観察 5.2

$m$  を  $4\pi$  に固定すると、係数が単位球の体積と一致するのは  $d = 3$  だけである。どの次元でも一致するのは、 $m$  をその次元の単位球の面積に選んだからである——論文59 が単位球の体積の最大の 5 を「半径を 1 と置いた」帰結としたのと同じく、ここでは「 $m$  を単位球の面積に置いた」ことが一致の条件である。

6. 横向き averages

設定：一つの方向に垂直な成分の二乗の和は  $1 - n_1^2$  で、その球面の積分は面積から体積を引いた値になる。

$$\oint_{S_{d-1}} (1 - n_1^2) dS = S_{d-1} - V_d = (d - 1) V_d$$

計算 6.1：横向きの積分と、 $V_d$  との比。

| $d$ | $S_{d-1} - V_d$ | $V_d$ との比 |
|-----|-----------------|-----------|
| 1   | 0.000000        | 0.000000  |
| 2   | 3.141593        | 1.000000  |
| 3   | 8.377580        | 2.000000  |
| 4   | 14.804407       | 3.000000  |
| 5   | 21.055156       | 4.000000  |
| 6   | 25.838564       | 5.000000  |
| 7   | 28.348596       | 6.000000  |
| 8   | 28.410985       | 7.000000  |

$d = 3$  の格子積分  $\oint \sin^2 \theta d\Omega$  は 8.377580410 で、 $8\pi/3$  に  $10^{-9}$  以内で合った。

観察 6.2

横向き積分は単位球の体積の  $d - 1$  倍で、一致するのは  $d = 2$  だけである。論文905 のラーモアの公式の  $2/3$  は  $\langle \sin^2 \theta \rangle = 1 - 1/d$ 、論文908 の電磁質量の  $4/3$  はその二倍で、どちらもこの族に入る——論文907 が示したとおり、 $d = 3$  で同じ  $8\pi/3$  に見える数は  $d = 4$  で 9.869604 と 14.804407 に分かれる。温度と圧力の  $4\pi/3$  は、それとは別の族にいる。

## 7. 分離子

観察 7.1

分離子は、全方向の平均を取るか、横向きの平均を取るかである。全方向の平均 ( $1/d$ ) なら、 $m$  を単位球の面積に取った係数はどの次元でも単位球の体積になる——横向きの平均 ( $1 - 1/d$ ) なら  $d - 1$  になり、 $d = 2$  でしか体積と一致しない。

## 観察 7.2

係数が最大になる次元。 $d = 1$  から  $20$  で単位球の体積が最大になるのは  $d = 5$  の **5.263789** で ( $V_4 = 4.934802 \cdot V_6 = 5.167713$ )、 $m$  を単位球の面積に取った温度の係数も  $5$  次元で最大になる——論文59 のとおり、この  $5$  は単位の置き方の帰結で、物理の特別な次元ではない。

## 観察 7.3

言わないこと。温度が体積であること、質量が面積や立体角であること、高次元の気体が存在すること、量子や相対論の補正は扱わない——示したのは、 $m$  を単位球の面積と同じ数にとると、温度・圧力・回る球殻の係数が、球面で方向の成分の二乗を積分した値として、どの次元でも単位球の体積になることである。

## 8. 点呼と結び

1.  $kT/\langle v^2 \rangle = m/d$  (第1節) :  $m = S_{d-1}$  で  $V_d$ 。
2.  $d = 3$  で **4.187827** 対 **4.188790** (計算 2.1) : 八つの次元で標準誤差の **1.37** 倍以内。
3. 面の側 **4.188790205** (第3節) : 発散定理の両辺・本稿の芯。
4. 球殻の慣性モーメント **8.377580** (観察 4.2) : 半分が **4.188790**。
5.  $m = 4\pi$  固定で  $d = 4$  は **3.141593** (計算 5.1) : 一致は  $d = 3$  だけ。
6. 横向き  $d = 4$  で **14.804407** (計算 6.1) : 体積の **3** 倍。
7. 最大は  $d = 5$  の **5.263789** (観察 7.2) : 論文59。
8. 全方向か、横向きか (観察 7.1) : 分離子・論文18・19・20・59・60・902・905・907・908。

結び :  $m$  を単位球の面積にとると、温度の係数はどの次元でも単位球の体積になる。マクスウェル分布から乱数で数えた温度の係数は、 $d = 1$  から  $8$  のすべてで単位球の体積に標準誤差の **1.37** 倍以内で合い、論文20 の  $4\pi/3$  は三次元の偶然ではなかった——正体は、球面で方向の成分の二乗を積分した値で、発散定理がそれを体積に変える。 $d = 3$  の格子積分で面の側 **4.188790205** と体積の側は差  $1.6 \times 10^{-10}$  で一致した。圧力の係数と回る球殻の係数も同じ族に入り、 $m$  を  $4\pi$  に固定すると一致は  $d = 3$  だけだった。横向きの平均を取る量は体積の  $d - 1$  倍で、ラーモアの公式の  $2/3$  と電磁質量の  $4/3$  はこちらにいる——分離子は、全方向の平均か、横向きの平均かである。既刊との位置——論文20 が係数に留めた一致を、どの次元でも成り立つ等式として面の積分から出し、論文908 の「球の体積ではない  $4/3$ 」と並べて、二つの族に分けた。正直に言えば——温度が体積だとも、質量が面積や立体角だとも言わない。 $m$  を単位球の面積と同じ数に選ぶと係数がこう見える、そこまでである。

## 参考文献

---

1. 山岸勇輝 (2026). 『山岸オーバークロック温度方程式』 [論文20]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21601035
2. 山岸勇輝 (2026). 『山岸球体圧縮圧力方程式』 [論文19]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600912
3. 山岸勇輝 (2026). 『山岸運動エネルギー方程式』 [論文18]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21430706
4. 山岸勇輝 (2026). 『単位球の体積は **5** 次元で最大になる』 [論文59]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21597865
5. 山岸勇輝 (2026). 『速度空間の球としての **c**』 [論文60]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21598012
6. 山岸勇輝 (2026). 『同じ  $c^3$  でも、黒体放射の 3 は次元を数え、プランク長の 3 は数えない』 [論文902]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22800314
7. 山岸勇輝 (2026). 『ラーモアの公式の  $2/3$  と  $c^3$  の 3 は、どちらも空間次元である』 [論文905]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22803759
8. 山岸勇輝 (2026). 『宇宙の膨張の式は塵ならニュートンの殻で厳密に出て、光なら減速が二倍外れる』 [論文907]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22804787
9. 山岸勇輝 (2026). 『電子の電磁質量の  $4/3$  は、球の体積ではなく場の向きの平均から来る』 [論文908]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22804819
10. Maxwell, J. C. (1860). Illustrations of the dynamical theory of gases. *Philosophical Magazine*.
11. Huang, K. (1987). *Statistical Mechanics*. Wiley.

---

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)