

明るさが F 値の二乗で決まるのは半角を正弦で測るときで、空気中の F 値は 0.5 を下回れない

— 正弦条件を満たすレンズでは像の照度は F 値の二乗に反比例してちょうど半分ずつ減り、F 値 0.5 で像側の半球全体から光が来る — 分離子は、開口の半角を正弦で測るか正接で測るか — [論文923]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月

YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/923>

— *From thinking to syncing.* —

要旨

写真では、F 値を $\sqrt{2}$ 倍ずつ変えると像の明るさが半分ずつ変わるとされる。本稿は、像の照度が射出側の半角の正弦の二乗に比例することから出発し、その「半分ずつ」がどの測り方で厳密か、測り方を替えるとどれだけ外れるか、F 値にどこまで小さい値があり得るかを数える。新しい定理も法則も主張しない。第一に、半角を正弦で測れば、照度はちょうど半分ずつ減る。F 値を半角の正弦の逆数の半分と置くと、照度は F 値の二乗に反比例し、 $\sqrt{2}$ 刻みの 11 段で比は 2 から 4.4×10^{-16} しか外れなかった。F1 と F16 の比は **256.000000** である（第2節）。第二に、F 値 0.5 で像側の半球全体から光が来る。そのとき半角は 90 度、照度は π (3.141593) で、F 値をそれより小さくすると正弦が 1 を超え、空気中では作れない（第2節）。第三に、半角を正接で測ると、明るい側で外れる。正接で測った照度と正弦で測った照度の比は、F 値 0.5 で 0.500000、1 で 0.800000、2 で 0.941176、16 で 0.999024 で、F1 と F16 の比は **205.000000** だった（第3節）。第四に、照度が見ているのは立体角ではなく投影立体角である。射出の円錐の立体角に対する投影立体角の比は、F 値 0.5 で 0.500000、1 で 0.933013、2 で 0.984123 だった（第4節）。第五に、分離子は、開口の半角を正弦で測るか正接で測るかである。正弦で測れば F 値の二乗の法則は厳密で、F 値の下限は 0.5 になる。正接で測ると暗い側では同じ値に近づくが、明るい側ほど二乗の法則から外れる（第5節）。キーワード：F 値、像面照度、正弦条件、開口数、投影立体角、写真レンズ。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない。像の照度が射出側の半角の正弦の二乗に比例すること、正弦条件、有効 F 値と開口数の関係、投影立体角は、いずれも標準的である。軸上だけを扱う。画面の周辺での明るさの低下、口径食、透過率、反射の損失は入れない。レンズを設計しない。収差を計算せず、正弦条件を満たすかどうかを二つの測り方として置くだけである。実在のレンズを論じない。製品の F 値の表記や、どのレンズが明るいかは扱わない。空気中に限る。像側が屈折率 1 の媒質だとして下限を言う。既刊との関係：論文 358 は、被写界深度の深さが測定値ではなく約束であることを示した。ここでは、同じ F 値が明るさについてはどの測り方で厳密になるかを数える。論文 757 は、解像度を波長・開口数・係数のどれで買うかで焦点深度の払いが違ふことを示した。ここでは開口数と同じ正弦が、明るさの F 値の二乗の法則と下限 0.5 を決めることを数える。論文 918 は、アンテナの利得が 4π の立体角への配り方を測る比であることを示した。ここでは、像の照度が立体角ではなく投影立体角を見ていて、F 値 0.5 で半球の投影立体角 π に届くことを数える。加えたのは、正弦で測る照度が $\sqrt{2}$ 刻みでちょうど半分ずつになることを確かめたこと、F 値の下限 0.5 で照度が π になることを示したこと、正接で測ったときの外れを並べたこと、立体角と投影立体角の比を出したこと、分離子を「正弦で測るか正接で測るか」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：輝度 L の面を写すとき、像の照度は射出側の半角 θ' で次のように書ける（透過率を 1 とする）。F 値 N を正弦で測る置き方と正接で測る置き方を並べる。

$$E = \pi L \sin^2 \theta', \quad \sin \theta' = \frac{1}{2N} \Rightarrow E = \frac{\pi L}{4N^2}, \quad \tan \theta' = \frac{1}{2N} \Rightarrow E = \frac{\pi L}{1 + 4N^2}$$

正弦で測る置き方は正弦条件を満たすレンズ、正接で測る置き方は主平面が平らなレンズの幾何に当たる。検算では $L = 1$ と置き、F 値を 0.5 から 16 まで $\sqrt{2}$ 刻みで動かした。

問い：F 値の二乗で明るさが半分ずつ変わるのは、どの測り方で厳密か。F 値はどこまで小さくできるか。

2. 正弦で測る

計算 2.1：F 値ごとの照度と半角。

F 値	正弦で測る照度	正接で測る照度	正接÷正弦	半角（正弦・度）	半角（正接・度）
0.500000	3.141593	1.570796	0.500000	90.0000	45.0000
0.707107	1.570796	1.047198	0.666667	45.0000	35.2644
1.000000	0.785398	0.628319	0.800000	30.0000	26.5651
1.414214	0.392699	0.349066	0.888889	20.7048	19.4712
2.000000	0.196350	0.184800	0.941176	14.4775	14.0362
2.828427	0.098175	0.095200	0.969697	10.1821	10.0250
4.000000	0.049087	0.048332	0.984615	7.1808	7.1250
5.656854	0.024544	0.024353	0.992248	5.0709	5.0512
8.000000	0.012272	0.012224	0.996109	3.5833	3.5763
11.313708	0.006136	0.006124	0.998051	2.5330	2.5305
16.000000	0.003068	0.003065	0.999024	1.7908	1.7899

正弦で測る照度は $\sqrt{2}$ 刻みで比 2 から最大 4.4×10^{-16} しか外れず、F1 と F16 の比は **256.000000** だった。F 値 0.5 の照度は π と差 0 で一致した。

観察 2.2

半角を正弦で測れば、F 値の二乗の法則は厳密で、下限は 0.5 である。F 値 0.5 で半角は 90 度になり、光は像側の半球全体から来る。それより小さい F 値は正弦が 1 を超える値を求めるので、空気中の像側では作れない。

3. 正接で測る

計算 3.1：正接で測った照度と正弦で測った照度の比は $4N^2/(1+4N^2)$ で、F 値 1 で **0.800000** と差 0 で一致した。F1 と F16 の照度の比は **205.000000** だった。

観察 3.2

半角を正接で測ると、明るい側ほど二乗の法則から外れる。F 値 16 では比は 0.999024 で二つの測り方はほとんど同じだが、F 値 1 では 0.8、0.5 では半分になる。正接で測る置き方では、F 値をいくら小さくしても半角は 90 度に届かず、照度は π に届かない。

4. 立体角と投影立体角

計算 4.1：射出の円錐（正弦で測る半角）の立体角と投影立体角。

F 値	立体角	投影立体角	投影÷立体角
0.5	6.283185	3.141593	0.500000
1.0	0.841787	0.785398	0.933013
2.0	0.199517	0.196350	0.984123

観察 4.2

照度が見ているのは、立体角ではなく投影立体角である。F 値 0.5 の円錐は半球で立体角は 2π だが、斜めから来る光は像面に斜めに当たるぶん弱まり、照度に効くのは投影立体角 π である。F 値が大きくなると円錐が細いほど、二つの角はそろそろ。

5. 分離子

観察 5.1

分離子は、開口の半角を正弦で測るか正接で測るかである。正弦で測れば照度は F 値の二乗に厳密に反比例し、F 値の下限は 0.5 で、そこで照度は π になる。正接で測ると F1 と F16 の比は 256 ではなく 205 になり、明るい側ほど外れる。暗い側では二つの測り方の差は消える。

観察 5.2

言わないこと。収差の計算、画面の周辺の明るさ、透過率、実在のレンズの表記は扱わない。示したのは、F 値の二乗の法則が正弦で測るときに厳密であり、そのとき空気中の F 値は 0.5 を下回れないことである。

6. 点呼と結び

1. $E = \pi L \sin^2 \theta'$ (第1節)：正弦の二乗。
2. $\sqrt{2}$ 刻みで比 $2 \cdot F1$ と $F16$ で **256.000000** (計算 2.1)：厳密に半分ずつ。
3. F 値 0.5 で照度 π (計算 2.1)：半球全体・下限。
4. 正接=正弦が F 値 1 で **0.800000** (計算 3.1)：明るい側で外れる。
5. 正接で $F1$ と $F16$ の比 **205.000000** (計算 3.1)：256 にならない。
6. 投影=立体角 $0.500000 \cdot 0.933013 \cdot 0.984123$ (計算 4.1)：投影立体角を見る。
7. 正弦か正接か (観察 5.1)：分離子・論文358・757・918。

結び：明るさが F 値の二乗で決まるのは半角を正弦で測るときで、空気中の F 値は 0.5 を下回れない。正弦で測れば、照度は $\sqrt{2}$ 刻みでちょうど半分ずつ減り、 $F1$ と $F16$ の比は 256 だった。F 値 0.5 で半角は 90 度、照度は半球の投影立体角 π に届き、それより小さい F 値は空気中では作れない。正接で測ると、F 値 1 で照度は 0.8 倍になり、 $F1$ と $F16$ の比は 205 だった。分離子は、開口の半角を正弦で測るか正接で測るかである。既刊との位置：論文358 が約束だと示した F 値の深さの側に対し明るさの側の厳密さを数え、論文757 の開口数と同じ正弦が下限を決めることを示し、論文918 の立体角の配り方に投影立体角を並べた。正直に言えば、レンズの良し悪しは言わない。二乗の法則がどの測り方で厳密か、そこまでである。

参考文献

1. Born, M., & Wolf, E. (1999). *Principles of Optics*. Cambridge University Press.
2. Kingslake, R. (1978). *Lens Design Fundamentals*. Academic Press.
3. 山岸勇輝 (2026). 『被写界深度の「深さ」は、測定値ではなく約束である』[論文358]. YOI:
<https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/358> ・ DOI: 10.5281/zenodo.22697216
4. 山岸勇輝 (2026). 『解像を三つの量のどれで買うかで、焦点深度の払いが違う』[論文757]. YOI:
<https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/757> ・ DOI: 10.5281/zenodo.23015169
5. 山岸勇輝 (2026). 『アンテナの利得は全方向で平均すると 1 で、半値幅から利得を出す係数は裾の電力で変わる』[論文918]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/918>

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)