

費用が最も安い直列の箱の数は残りの桁数に比例し、箱一つの受け持ちは費用の冪だけで決まる

— 箱一つの費用が体積の 1 より小さい冪で増えるなら、一つの箱での反応の進みは求める残りによらず一つに決まる — 分離子は、箱一つの費用が体積に比例するか、比例より緩く増えるか — [論文960]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月

YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/960>

— From thinking to syncing. —

要旨

よく混ぜた箱を直列に分けるほど、同じ残りまで反応させるのに要る合計の大きさは小さくなる（論文931）。本稿は、一次反応の残りを $0.1 \cdot 0.01 \cdot 0.001$ にするのに要る合計の大きさを箱の数ごとに出し、箱一つの費用がその体積の a 乗（置いた値）で増えるとき、合計の費用が最も安い箱の数を探す。新しい定理も法則も主張しない。第一に、箱を分けるほど要る大きさは押し出し流れに近づく。残り 0.001 にするには、反応の速さと合計の滞在時間の積が、箱 1 個で **999**、2 個で **61.245553**、10 個で **9.952623** 要り、押し出し流れの **6.907755** に近づいた（第2節）。第二に、費用が体積に比例するなら、最も安い箱の数は無い。 $a = 1$ では費用は合計の大きさそのもので、箱 1 個から **2000** 個まで箱を足すほど下がり続け、**2000** 個でも押し出し流れより **0.011943** 大きかった（残り 0.001 ）（第2節）。第三に、比例より緩く増えるなら最も安い数があり、残りの桁数に比例する。残り $0.1 \cdot 0.01 \cdot 0.001$ で、最も安い箱の数は $a = 0.6$ なら $2 \cdot 4 \cdot 6$ 個、 $a = 0.8$ なら $5 \cdot 10 \cdot 15$ 個で、最も安い費用もちょうど **1 : 2 : 3** だった。残り 0.001 の費用は箱 1 個の **0.151133** 倍と **0.038913** 倍だった（第3節）。第四に、箱一つの受け持ちは費用の冪だけで決まる。箱一つでの反応の速さと滞在時間の積 x の最適は、残りによらず $a(1+x)\ln(1+x) = x$ の解で、 $a = 0.4 \cdot 0.6 \cdot 0.8 \cdot 0.9 \cdot 0.95$ で **8.314868**、**2.084104**、**0.590761**、**0.239311**、**0.109022**、一桁あたりの箱の数は **1.031804**、**2.044450**、**4.960194**、**10.731874**、**22.251750** だった（第4節）。第五に、分離子は、箱一つの費用が体積に比例するか、比例より緩く増えるかである。比例なら箱は足すほど安く、押し出し流れが下の限りになる。比例より緩ければ、箱一つの受け持ちは一つに決まり、箱の数は求める桁数で決まる（第5節）。キーワード：完全混合槽、直列の槽、一次反応、押し出し流れ、設備の費用、規模の経済。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない。完全混合槽を直列につないだときの一次反応の残りの式、箱を増やすと押し出し流れに近づくこと、設備の費用が大きさの1より小さい幂で増えること（規模の経済）、箱の数を費用で選ぶ設計の問いは、いずれも化学工学で知られている。費用の幂を置く。箱一つの費用を体積の a 乗と置き、 $a = 0.4 \cdot 0.6 \cdot 0.8 \cdot 0.9 \cdot 0.95 \cdot 1$ を試した。実際の設備の費用、運転の費用、混ぜる動力、配管、熱の出入りは扱わない。一次反応だけを扱う。論文931と同じく一次反応で、流れの量と反応の速さは決まっているとした。二次反応、温度の違う箱、箱ごとに大きさを変える設計は入れない。整数の比例は三つの残りを見た。残りの桁数への比例は連続に広げた式から言い、整数の箱の数では残り $0.1 \cdot 0.01 \cdot 0.001$ の三通りで確かめた。既刊との関係：論文931の射程注記は、設計を論じず、どの箱の数が良いか、費用は扱わないと書いた。本稿はその席に座る（先客なし）。論文931は、同じ平均の滞在時間で、よく混ぜた箱を直列に分けるほど早く出る分が減り、反応が押し出し流れに近づくことを示した。ここでは、残りを決めたときに要る大きさと箱の数の兼ね合いを費用で数え、最も安い箱の数がどう決まるかを出す。加えたのは、三つの残りで要る合計の大きさを並べたこと、費用が体積に比例するとき最も安い数がないことを示したこと、比例より緩いとき最も安い数が残りの桁数に比例することを示したこと、箱一つの受け持ちが費用の幂だけで決まる条件を出したこと、分離子を「体積に比例するか、比例より緩く増えるか」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：同じ大きさのよく混ぜた箱を N 個直列にし、一次反応（速さの定数 k ）を流す。箱一つの滞在時間を τ_1 、 $x = k\tau_1$ とすると、出口の残りは $r = (1 + x)^{-N}$ で、要る合計の大きさ（反応の速さと合計の滞在時間の積）は

$$k\tau = Nx = N \left(r^{-1/N} - 1 \right)$$

である（ $N = 1$ から 500 まで、戻した残りの相対の食い違いは最大 5.190×10^{-14} ）。 N を大きくすると $k\tau$ は押し出し流れの $\ln(1/r)$ に近づく。流れの量を決めると箱一つの体積は x に比例するので、箱一つの費用を x^a 、合計の費用を

$$C = Nx^a = \ln \frac{1}{r} \cdot \frac{x^a}{\ln(1+x)}$$

とする（ $N = \ln(1/r) / \ln(1+x)$ を使った）。

問い：残りを決めたとき、費用が最も安い箱の数はどう決まるか。

2. 要る大きさと、体積に比例する費用

計算 2.1：要る合計の大きさ $k\tau$ 。

残り	$N = 1$	2	3	5	10	押し出し流れ
0.1	9.000000	4.324555	3.463304	2.924466	2.589254	2.302585
0.01	99.000000	18.000000	10.924767	7.559432	5.848932	4.605170
0.001	999.000000	61.245553	27.000000	14.905359	9.952623	6.907755

計算 2.2 : $\alpha = 1$ の費用は kr そのもので、 $N = 50$ で $2.356427 \cdot 4.823910 \cdot 7.407681$ 、 $N = 2000$ で $2.303911 \cdot 4.610476 \cdot 6.919698$ だった。三つの残りとも $N = 1$ から 2000 まで箱を足すほど下がり続け、 $N = 2000$ でも押し出し流れより $0.001326 \cdot 0.005306 \cdot 0.011943$ 大きかった。

観察 2.3

費用が体積に比例するなら、箱は足すほど安い。 $\alpha = 1$ では $C/\ln(1/r) = x/\ln(1+x)$ で、 x が 0 に近づくほど 1 に近づく。最も安い箱の数は無く、費用の下限は押し出し流れの $\ln(1/r)$ である。

3. 比例より緩い費用と、最も安い箱の数

計算 3.1 : 箱の数を 1 から 500 まで探した最も安い数（どれも 50 より小さく、範囲の端ではない）。括弧は、そのときの費用と箱 1 個の費用に対する比。

費用の幂	残り 0.1	0.01	0.001
$\alpha = 0.4$	1 個 (2.408225 · 1.000000)	2 個 (4.816449 · 0.766431)	3 個 (7.224674 · 0.456029)
$\alpha = 0.6$	2 個 (3.176705 · 0.850024)	4 個 (6.353410 · 0.403298)	6 個 (9.530115 · 0.151133)
$\alpha = 0.8$	5 個 (3.255602 · 0.561355)	10 個 (6.511203 · 0.164874)	15 個 (9.766805 · 0.038913)

箱 1 個の費用は $\alpha = 0.4$ で $2.408225 \cdot 6.284259 \cdot 15.842590$ 、 $\alpha = 0.6$ で $3.737193 \cdot 15.753647 \cdot 63.057869$ 、 $\alpha = 0.8$ で $5.799546 \cdot 39.491912 \cdot 250.987672$ だった。三つの α で、残り 0.01 · 0.001 の最も安い数と費用は残り 0.1 のちょうど 2 倍 · 3 倍 (10^{-9} 以内) だった。

観察 3.2

比例より緩い費用には最も安い箱の数があり、残りの桁数に比例する。最も安い数は、残りを小さくするほど、また a が 1 に近いほど増えた（九通り）：そのときの箱一つの x は、残りによらず $a = 0.4$ で 9.000000、 $a = 0.6$ で 2.162278、 $a = 0.8$ で 0.584893 だった。

4. 箱一つの受け持ち

計算 4.1 : C の $\ln(1/r)$ 以外の部分 $x^a / \ln(1+x)$ は残りを含まないので、 x の最適は残りによらない。微分を 0 と置くと $a(1+x)\ln(1+x) = x$ で、その解と、 x を 10^{-4} から 10^4 まで対数で等しく 400001 点に刻んで直接探した最安。

a	x (刻みで探した値)	箱一つの残り	一桁あたりの箱の数	一桁あたりの費用
0.4	8.314868 (8.314957)	0.107355	1.031804	2.407350
0.6	2.084104 (2.084107)	0.324243	2.044450	3.176349
0.8	0.590761 (0.590772)	0.628630	4.960194	3.255579
0.9	0.239311 (0.239310)	0.806900	10.731874	2.963072
0.95	0.109022 (0.109023)	0.901695	22.251750	2.710215

五つの a とも、式の解と刻みの最安は相対 10^{-4} 以内で一致した。

観察 4.2

箱一つの受け持ちは費用の幂だけで決まり、 a が 1 に近いほど小さい。 $a = 0.6$ なら箱一つで残りを 0.324243 まで減らすのが最も安く、残り 0.001 ならそれを連続に広げて 6.133351 段重ねる（整数の最安は 6 個）： a が 0.4 から 0.95 に近づくと、箱一つの x は 8.314868 から 0.109022 に下がり、一桁あたりの箱の数は 1.031804 から 22.251750 に増えた。

5. 分離子

観察 5.1

分離子は、箱一つの費用が体積に比例するか、比例より緩く増えるかである。比例 ($a = 1$) なら、 x を小さくするほど費用は押し出し流れに近づき、最も安い箱の数は無い (計算 2.2) : 比例より緩い ($a < 1$) なら、 $x^a / \ln(1+x)$ は x が 0 に近づくと x の $a-1$ 乗のように大きくなり、最適の x が一つ決まる。箱の数は $\ln(1/r) / \ln(1+x)$ で、求める残りの桁数に比例する。

観察 5.2

言わないこと。実際の設備の費用の幂、運転の費用、混ぜる動力、配管、二次反応、箱ごとに大きさを変える設計は扱わない。示したのは、同じ大きさの箱と一次反応で、費用を体積の幂と置いたとき、最も安い箱の数と箱一つの受け持ちがどう決まるかである。

6. 点呼と結び

1. 要る大きさと費用の式 (第1節) : 費用は残りの対数と x だけの部分の積。
2. 残り 0.001 で 999 から 9.952623 へ (計算 2.1) : 押し出し流れ 6.907755 に近づく。
3. $a = 1$ は 2000 個でも下がり続ける (計算 2.2) : 最も安い数は無い。
4. $a = 0.8$ で $5 \cdot 10 \cdot 15$ 個、費用比 0.038913 (計算 3.1) : 残りの桁数に比例。
5. $a = 0.6$ で箱一つの x が 2.084104 (計算 4.1) : 残りによらない。
6. 体積に比例か、比例より緩いか (観察 5.1) : 分離子・論文931 の射程注記。

結び : 費用が最も安い直列の箱の数は残りの桁数に比例し、箱一つの受け持ちは費用の幂だけで決まる。箱一つの費用が体積の a 乗で増えるとき、合計の費用は残りの対数と箱一つの x だけの部分の積に分かれた。 $a = 0.6 \cdot 0.8$ で最も安い箱の数は残り $0.1 \cdot 0.01 \cdot 0.001$ に対して $2 \cdot 4 \cdot 6$ 個と $5 \cdot 10 \cdot 15$ 個になり、箱一つの x の最適は $2.084104 \cdot 0.590761$ だった。 $a = 1$ では箱を 2000 個まで足しても費用は下がり続けた。分離子は、箱一つの費用が体積に比例するか、比例より緩く増えるかである。既刊との位置 : 論文931 が同じ滞在時間で数えた箱の数の効き目に、論文931 が扱わなかった費用を入れ、最も安い箱の数を出した。正直に言えば、費用の幂は置いた値で、実際の設備は運転の費用も配管も持つ。同じ大きさの箱と一次反応で、最も安い数がどう決まるか、そこまでである。

参考文献

1. Fogler, H. S. (2006). *Elements of Chemical Reaction Engineering*. Prentice Hall.
2. Levenspiel, O. (1999). *Chemical Reaction Engineering*. Wiley.
3. Peters, M. S., Timmerhaus, K. D., & West, R. E. (2003). *Plant Design and Economics for Chemical Engineers*. McGraw-Hill.
4. 山岸勇輝 (2026). 『同じ平均の滞在時間でも、混ぜた箱を直列に分けるほど早く出る分が減り、反応は押し出し流れに近づく』 [論文931]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/931>

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)