倍音がずれる弦では、どの倍音をそろえるかでオクターブの広がりが一つに決まらない

— 素の弦では 2 倍音で合わせると 4.3481 セント、6 倍音で合わせると 37.8711 セント広がり、合わせなかった組はうなる —分離子は、オクターブを基音で数えるか、そろえる倍音の番号で数えるか —

[論文974]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月
YOI: https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/974

— From thinking to syncing. —

要旨

曲げの硬さがある弦では倍音が整数倍より高くずれ、巻き弦ではそのずれが小さい（論文942・958）。そこでは、ずれに合わせて音程を広げる調律は扱わなかった。本稿は、958 の巻き弦と素の弦の曲げの係数で、下の音 110 Hz に上の音を「下の 2 倍音と上の基音」「下の 4 倍音と上の 2 倍音」「下の 6 倍音と上の 3 倍音」のどれかで合わせ、オクターブがどれだけ広がり、ほかの組がどれだけうなるかを数える。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、どの倍音で合わせてもオクターブは広がる。素の弦（曲げの係数 1.681419×10^{-3}）では、2 倍音・4 倍音・6 倍音で合わせると、基音どうしの比は 2 倍より 4.3481・17.1773・37.8711 セント広かった（第2節）。 第二に、合わせなかった組はうなる。素の弦を 2 倍音で合わせると、4 倍音と上の 2 倍音は毎秒 3.291949 回、6 倍音と上の 3 倍音は 13.034495 回うなった。6 倍音で合わせると 2 倍音と上の基音が 4.315949 回うなった（第2節）。 第三に、巻き弦では同じことが桁違いに小さい。巻き弦（5.163611×10^{-5}）の広がりは 0.1341・0.5361・1.2054 セントで、2 倍音で合わせたときの 4 倍音のうなりは毎秒 0.102204 回だった（第2節）。 第四に、広がりは曲げの係数と倍音の番号だけで決まる。広がりは、$(1 + B\,m^2)/(1 + B\,k^2)$ の 2 を底とする対数に 600 を掛けたセント（下の m 倍音と上の k 倍音）の閉じた式と 10^{-9} セント以内で一致し、2 倍音で合わせた広がりは 958 の 2 倍音のずれ 0.1341・4.3481 セントと一致した（第3節）。 第五に、分離子は、オクターブを基音で数えるか、そろえる倍音の番号で数えるかである。基音で数えれば、オクターブは 2 倍の一つに決まる。倍音をそろえて数えれば、そろえる番号ごとに違う広がりになり、6 倍音で合わせた広がりは 2 倍音の 8.709748 倍（素の弦）だった（第4節）。 キーワード：調律、オクターブの広がり、非調和性、倍音、うなり、弦の振動。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない。曲げの硬さを持つ弦の倍音の式、倍音のずれに合わせてオクターブを広く調律すること（ストレッチ・チューニング）、うなりが二つの振動数の差であることは、いずれも楽器の物理と調律で知られている。二つの弦に同じ曲げの係数を置く。下の音と上の音の弦を同じ曲げの係数とし、958 の巻き弦 5.163611×10^{-5} と素の弦 1.681419×10^{-3} を使った。実在のピアノやギターで音ごとに係数が変わることは入れない。合わせ方の良し悪しを言わない。どの倍音で合わせるべきか、うなりがどう聞こえるか、音色は扱わない。一つのオクターブだけを扱う。下の音 110 Hz と上の音の一組だけで、鍵盤全体に広がりを積み重ねることは扱わない。既刊との関係：論文958 の射程注記は、楽器と調律を扱わず、実在のギターやピアノ、ずれに合わせて音程を広げる調律、音色の聞こえ方は扱わないと書いた。本稿はそのうち音程を広げる調律の席に座る（先客なし）。論文942 の射程注記も、倍音のずれに合わせて音程を広げる調律を扱わないと書いた。本稿はその席にも座る。論文958 は、巻き弦が重さを巻き線に持たせ、同じ重さの素の弦より倍音のずれがずっと小さいことを示した。ここでは、そのずれがオクターブの合わせ方をどれだけ一つに決めなくするかを数える。論文466 は、音律で全部の音程を同時に合わせられないことが証明された事実であることを示した。ここでは、倍音がずれると一つのオクターブの中でさえ全部の倍音の組はそろわないことを数える。加えたのは、三つの合わせ方で広がりとうなりを並べたこと、二つの弦で比べたこと、閉じた式で確かめたこと、958 のずれと一致を確かめたこと、分離子を「基音か、倍音の番号か」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：論文942 と同じく、曲げの係数 B の弦の n 番目の倍音を $f_n = n f_0 \sqrt{1 + B n^2}$（$f_0$ は曲げが無いときの基音）とする。下の音 $f_0 = 110\,\mathrm{Hz}$ に対し、上の音の f_0' を、上の k 番目の倍音が下の m 番目の倍音に等しくなるように決める（$m = 2k$）。オクターブの広がりは、実際の基音の比が 2 倍からずれる大きさで

$$\Delta = 1200 \log_2 \frac{f_1'}{2 f_1} = 600 \log_2 \frac{1 + B m^2}{1 + B k^2} \text{ セント}$$

である。うなりは、そろえていない組 (m', k') の二つの振動数の差 $|f_{m'} - f_{k'}'|$ とする。

問い：倍音がずれる弦で、オクターブは一つに合わせられるか。

2. 三つの合わせ方

計算 2.1：素の弦（直径 0.955522 mm・$B = 1.681419 \times 10^{-3}$）。

合わせ方	上の基音（Hz）	広がり（セント）	うなり 2:1	うなり 4:2	うなり 6:3
下 2＝上 1	220.738585	4.3481	0.000000	**3.291949**	13.034495
下 4＝上 2	222.380430	17.1773	1.641846	0.000000	8.075997
下 6＝上 3	225.054534	**37.8711**	4.315949	5.361657	0.000000

計算 2.2：巻き弦（$B = 5.163611 \times 10^{-5}$）。

合わせ方	上の基音（Hz）	広がり（セント）	うなり 2:1	うなり 4:2	うなり 6:3
下 2＝上 1	220.022719	0.1341	0.000000	0.102204	0.408684
下 4＝上 2	220.073817	0.5361	0.051098	0.000000	0.255358
下 6＝上 3	220.158918	1.2054	0.136200	0.170217	0.000000

うなりの単位は Hz（毎秒の回数）。合わせた組のうなりは六つとも 10^{-9} Hz 未満だった。

> **観察 2.3**
>
> 一つの合わせ方で、ほかの組は合わない。素の弦を 2 倍音で合わせると 4:2 と 6:3 がうなり、6 倍音で合わせると 2:1 と 4:2 がうなった。そろえる番号が大きいほど広がりは大きく、巻き弦では同じ並びが桁違いに小さかった。

3. 閉じた式

計算 3.1：閉じた式 $600 \log_2((1 + Bm^2)/(1 + Bk^2))$ は、素の弦で 2:1 4.3481・4:2 17.1773・6:3 37.8711、巻き弦で 0.1341・0.5361・1.2054 セントで、六つとも刻まずに出した値と 10^{-9} セント以内だった。2:1 の広がりは 958 の 2 倍音のずれ（巻き弦 0.1341・素の弦 4.3481 セント）と 5×10^{-5} 以内で一致した。6:3 の広がりは 2:1 の 8.709748 倍（素の弦）・8.990718 倍（巻き弦）だった。

> **観察 3.2**
>
> 広がりは、曲げの係数と倍音の番号だけで決まる。下の音の高さによらず、B と $m \cdot k$ で広がりが決まる。2 倍音で合わせた広がりは、2 倍音が整数倍からずれる大きさそのものだった。

4. 分離子

> **観察 4.1**
>
> 分離子は、オクターブを基音で数えるか、そろえる倍音の番号で数えるかである。基音の比で数えれば、オクターブは 2 倍の一つである。倍音をそろえて数えると、そろえる番号ごとに広がりが違い、素の弦では 2 倍音の 4.3481 セントから 6 倍音の 37.8711 セントまで 8.709748 倍に開いた。どれか一組をそろえれば、残りの組はうなった。

> **観察 4.2**
>
> 言わないこと。実在のピアノやギターの音ごとの曲げの係数、鍵盤全体への積み重ね、どの合わせ方が良いか、うなりや音色の聞こえ方は扱わない。示したのは、同じ曲げの係数の二つの弦で、オクターブの広がりがそろえる倍音の番号で一つに決まらないことである。

5. 点呼と結び

1. 倍音の式と広がりの式（第1節）：B と番号だけで決まる。
2. 素の弦の広がり 4.3481・17.1773・**37.8711** セント（計算 2.1）：合わせ方で違う。
3. 2 倍音で合わせると 4:2 が **3.291949 Hz** うなる（計算 2.1）：ほかの組は合わない。
4. 巻き弦では 0.1341・0.5361・1.2054 セント（計算 2.2）：桁違いに小さい。
5. 閉じた式と 958 のずれに一致（計算 3.1）：確かめ。
6. 基音か、倍音の番号か（観察 4.1）：分離子・論文958 と論文942 の射程注記。

結び：倍音がずれる弦では、どの倍音をそろえるかでオクターブの広がりが一つに決まらない。958 の素の弦で 110 Hz の上にオクターブを合わせると、2 倍音・4 倍音・6 倍音でそろえた広がりは 4.3481・17.1773・37.8711 セントで、2 倍音でそろえると 4:2 の組が毎秒 3.291949 回うなった。巻き弦では同じ広がりが 0.1341・0.5361・1.2054 セントで、広がりは曲げの係数と倍音の番号だけの閉じた式で決まった。分離子は、オクターブを基音で数えるか、そろえる倍音の番号で数えるかである。既刊との位置：論文958 と論文942 が数えた倍音のずれで、二つが扱わなかった音程を広げる調律を数え、論文466 の「全部は合わせられない」が一つのオクターブの中でも起きることを示した。正直に言えば、二つの弦に同じ係数を置いた一組だけで、実際の楽器の調律は見ていない。倍音をそろえる番号でオクターブがどれだけ違うか、そこまでである。

参考文献

1. Benson, D. J. (2007). *Music: A Mathematical Offering*. Cambridge University Press.
2. Fletcher, H. (1964). Normal vibration frequencies of a stiff piano string. *The Journal of the Acoustical Society of America*.
3. Fletcher, N. H., & Rossing, T. D. (1998). *The Physics of Musical Instruments* (2nd ed.). Springer.
4. 山岸勇輝 (2026).『全部を合わせられないことは、証明された事実である』[論文466]. YOI: https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/466 ・ DOI: 10.5281/zenodo.22733284
5. 山岸勇輝 (2026).『曲げの硬さで倍音は整数倍より高くなり、同じ高さの弦では太いほどずれる』[論文942]. YOI: https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/942
6. 山岸勇輝 (2026).『巻き弦は重さを巻き線に持たせ、同じ重さの素の弦より倍音のずれがずっと小さい』[論文958]. YOI: https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/958

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)