

ピッチ円を決めたカムでは、接触の応力はローラーと輪郭の曲率半径が 等しいあたりで最も小さい

— ヘルツの線接触で持ち上げの区間の応力の最大を数えると、基礎円を決めた場合はローラーが大きいほど応力が下がり、ピッチ円を決めた場合は尖る手前より内側に最小がある — 分離子は、決めておくのが基礎円か、ピッチ円か — [論文990]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月

YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/990>

— *From thinking to syncing.* —

要旨

カムの切り下げを避けるローラーの大きさは、圧力角と違い、減速の強さの順に決まる（論文967）。そこでも論文929でも、輪郭とローラーの接触の応力は扱わなかった。本稿は、サイクロイドと単振動の持ち上げで、ばねと質量の力とヘルツの線接触から持ち上げの区間の応力の最大を出し、ローラーの半径でどう変わるかを、基礎円を決める場合とピッチ円を決める場合で比べる。新しい定理も法則も主張しない。第一に、基礎円を決めると、ローラーは大きいほど応力が下がる。基礎円 30 mm のサイクロイドで、ローラー 4 mm の **333.861 MPa** から 30 mm の **139.420 MPa** まで下がり、基礎円 5~30 mm の二つの曲線の 10 通りのどれでも、ローラー 1~40 mm で単調に下がった（第2節）。第二に、ピッチ円を決めると、応力の最小は内側にある。ピッチ円 30 mm のサイクロイドで、ローラー 5 mm の **303.091 MPa**、21.5 mm の **180.310 MPa**、尖る手前の 29.5 mm の **611.151 MPa** だった（第3節）。第三に、最良のローラーは、応力が最大の点の輪郭の曲率半径とほぼ等しい。最良のローラーの半径を、そのとき応力が最大になる点の輪郭の曲率半径で割ると、二つの曲線と三つのピッチ円の 6 通りで **0.962550** から **1.023792** だった（第3節）。第四に、最良の半径は、ピッチ曲線の曲率半径の最小より十分小さい。最良の半径÷ピッチ曲線の曲率半径の最小は、サイクロイドで **0.707727~0.740000**、単振動で **0.583333~0.595833** だった（第3節）。第五に、分離子は、決めておくのが基礎円か、ピッチ円か。基礎円を決めると、ローラーを大きくするとピッチ曲線も外へ広がり、輪郭の曲率半径はローラー 4~30 mm で 26.914 mm より小さくならなかった（基礎円 30 mm のサイクロイド）。ピッチ円を決めると、ローラーを大きくするほど輪郭の曲率半径がローラーの分だけ削られた（第4節）。キーワード：カム、接触の応力、ヘルツの接触、ローラーの半径、ピッチ円、曲率半径。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない。二つの円柱の線接触の圧力の式（ヘルツ）、ローラーの半径がピッチ曲線の曲率半径より小さくないと輪郭が尖ること、ローラーを大きくすると接触の等価半径が大きくなることは、いずれも接触力学とカムの設計で既知である。置いた値である。持ち上げ 20 mm・角 120 度・600 rpm・質量 0.5 kg・ばね 2000 N/m・予圧 50 N・幅 10 mm・鋼の弾性係数 210 GPa・ポアソン比 0.3、基礎円 5～30 mm、ピッチ円 25・30・40 mm は本稿で置いた。どのカムにも対応しない。強さを論じない。材料が耐える応力、寿命、摩擦、潤滑、戻りと休みの区間、従動節の偏心は扱わない。持ち上げの区間の応力の最大だけを数える。理由を分けない。最良の半径が輪郭の曲率半径に近くなることは、最大の点での等価半径の形から読むだけで、応力が最大の点がローラーの半径で動く分は分けて測っていない。既刊との関係：論文929の射程注記は、カムを設計せず、カムの輪郭、圧力角、接触の応力、材料は扱わないと書き、論文961・論文967・論文972・論文977の射程注記も、輪郭の強さを扱わず接触の応力は扱わないと書いた。本稿はそのうち接触の応力の席に座る（先客なし。圧力角の席には論文961が、切り下げの席には論文967が座った）。論文967は、カムの切り下げを避けるローラーの大きさが、圧力角と違い、減速の強さの順に決まることを示した。ここでは、切り下げの手前までのローラーの大きさと、接触の応力がどう変わるかを数える。論文961は、速さの最大が同じカムの曲線でも、圧力角を収めるピッチ円は角が最大になる位置で変わることを示した。ここではピッチ円を三つ置いて、最良のローラーを探す。加えたのは、二つの曲線でローラーの半径ごとに応力の最大を出したこと、基礎円を決めると単調に下がることを10通りで確かめたこと、ピッチ円を決めると内側に最小があることを6通りで確かめたこと、最良の半径を輪郭の曲率半径と比べたこと、分離子を「基礎円か、ピッチ円か」に置いたことである。

1. 記法と問い

持ち上げと力：持ち上げ $h = 20$ mm を角 $\beta = 120$ 度で、サイクロイド $s = h(u - \sin 2\pi u / (2\pi))$ か単振動 $s = h(1 - \cos \pi u) / 2$ ($u = \theta / \beta$) で行う。カムは 600 rpm で回り、従動節の質量 0.5 kg、ばね 2000 N/m、予圧 50 N とし、従動節を押す力を $F = 50 + 2000s + 0.5\ddot{s}$ 、法線の力を $F / \cos \phi$ (ϕ は圧力角) とする。

接触の応力：カムの中心からローラーの中心までの距離を $R = R_p + s$ (R_p はピッチ円の半径) とし、ピッチ曲線の曲率半径 ρ_p から輪郭の曲率半径を $\rho_c = \rho_p - r$ (r はローラーの半径) とする。等価半径と接触の圧力の最大（幅 10 mm・鋼）は

$$\frac{1}{R^*} = \frac{1}{r} + \frac{1}{\rho_c}, \quad p_0 = \sqrt{\frac{F_n E^*}{\pi b R^*}}, \quad E^* = \frac{E}{2(1 - \nu^2)}$$

で、持ち上げの区間を刻んで p_0 の最大を取る。基礎円を決める場合は $R_p = \text{基礎円} + r$ 、ピッチ円を決める場合は R_p をそのまま置く。 $\rho_p > 0$ で $\rho_c \leq 0$ になれば輪郭が尖るとした。

問い：ローラーを大きくすると、接触の応力の最大はどう変わり、それは何を決めておくかでどう違うか。

2. 基礎円を決めた場合

計算 2.1：基礎円 30 mm。

ローラー	サイクロイド (MPa)	最大の点の角 (度)	単振動 (MPa)	最大の点の角 (度)
4 mm	333.861	37.02	301.250	18.00
10 mm	217.516	38.40	198.639	23.58
20 mm	162.136	39.72	150.472	27.36
30 mm	139.420	40.44	130.883	29.10

サイクロイドのローラー 30 mm で、輪郭の曲率半径の最小は 26.914 mm だった。基礎円 5・10・15・20・30 mm の二つの曲線の 10 通りで、ローラーを 1~40 mm と 1 mm ずつ変えると、応力の最大はどれも単調に下がり、最も小さいのは 40 mm だった（サイクロイドで基礎円 5 mm の 203.271 MPa から 30 mm の 126.804 MPa）。

3. ピッチ円を決めた場合

計算 3.1：ローラーを 0.5 mm ずつ変えたときの最良の半径。

曲線	ピッチ円	ピッチ曲線の曲率半径の最小	最良の半径	応力 (MPa)	5 mm の応力	最良÷輪郭の曲率半径
サイクロイド	25 mm	25.000 mm	18.5 mm	196.573	308.286	0.962550
サイクロイド	30 mm	30.000 mm	21.5 mm	180.310	303.091	0.987375
サイクロイド	40 mm	38.857 mm	27.5 mm	157.836	298.062	0.975829
単振動	25 mm	30.000 mm	17.5 mm	187.573	276.860	0.989181
単振動	30 mm	34.483 mm	20.5 mm	172.723	273.004	1.023792
単振動	40 mm	43.636 mm	26.0 mm	151.816	270.869	1.005501

尖る手前の半径では、サイクロイドのピッチ円 30 mm で 29.5 mm の 611.151 MPa、単振動のピッチ円 40 mm で 43.5 mm の 1109.811 MPa まで上がった。6 通りとも、最小は最も小さい半径と尖る手前の半径の間にあった。最良の半径÷ピッチ曲線の曲率半径の最小は、サイクロイドで $0.740000 \cdot 0.716667 \cdot 0.707727$ 、単振動で $0.583333 \cdot 0.594500 \cdot 0.595833$ だった。

観察 3.2

最良のローラーは、応力が最大の点の輪郭の曲率半径とほぼ等しい。最良の半径÷応力が最大の点の輪郭の曲率半径は 0.962550 から 1.023792 だった。ピッチ円を決めると、ある点で $r + \rho_c = \rho_p$ はローラーによらず、等価半径 $r\rho_c/(r + \rho_c)$ は $r = \rho_c$ で最も大きい。応力が最大の点はローラーの半径で動くので（サイクロイドのピッチ円 30 mm で最良のとき 52.83 度）、この読みは最大の点を固定したときの形である。

4. 分離子

観察 4.1

分離子は、決めておくのが基礎円か、ピッチ円か。基礎円を決めると、ローラーを大きくした分だけピッチ曲線が外へ広がり、輪郭の曲率半径はあまり削られない（基礎円 30 mm のサイクロイドでローラー 30 mm でも最小 26.914 mm）：ピッチ円を決めると、ピッチ曲線は動かず、輪郭の曲率半径がローラーの分だけ削られるので、大きすぎるローラーは等価半径を小さくして応力を上げた。

観察 4.2

言わないこと。材料が耐える応力、寿命、摩擦と潤滑、戻りと休みの区間、偏心、圧力角の上限との兼ね合い、実在のカムの値は扱わない。示したのは、置いた力と大きさと、接触の応力の最大がローラーの半径でどう変わり、何を決めておくかで向きが違ふことである。

5. 点呼と結び

1. ヘルツの線接触と持ち上げの力（第1節）：持ち上げの区間の最大。
2. 基礎円を決めると単調に下がる（計算 2.1）：4 mm の 333.861 MPa から。
3. ピッチ円 30 mm で最良 21.5 mm の 180.310 MPa（計算 3.1）：内側に最小。

4. 最良÷輪郭の曲率半径 **0.962550**～**1.023792** (計算 3.1) : ほぼ等しい。
5. 最良÷ピッチ曲線の曲率半径の最小 **0.583333**～**0.740000** (計算 3.1) : 尖る手前より十分内側。
6. 基礎円か、ピッチ円か (観察 4.1) : 分離子・論文929 ほかの射程注記。

結び：ピッチ円を決めたカムでは、接触の応力はローラーと輪郭の曲率半径が等しいあたりで最も小さい。置いた持ち上げと力でヘルツの線接触の圧力の最大を数えると、ピッチ円 30 mm のサイクロイドでローラー 21.5 mm の 180.310 MPa が最小で、最良の半径÷応力が最大の点の輪郭の曲率半径は 6 通りで 0.962550 から 1.023792 だった。基礎円を決めると、ローラーは大きいほど応力が下がり、4 mm の 333.861 MPa から 30 mm の 139.420 MPa になった。分離子は、決めておくのが基礎円か、ピッチ円か。既刊との位置：論文961 が圧力角で、論文967 が切り下げで決めたローラーとピッチ円に、論文929 ほか扱わなかった接触の応力を足した。正直に言えば、置いた値のカムで、持ち上げの区間の応力の最大だけを数えた。材料が耐えるかは言わない。ローラーの大きさで応力がどう変わるか、そこまでである。

参考文献

1. Johnson, K. L. (1985). *Contact Mechanics*. Cambridge University Press.
2. 山岸勇輝 (2026). 『サイクロイドのカムは加速度の最大が大きいのに、端で跳ばないぶん速く回しても揺れが残りにくい』 [論文929]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/929>
3. 山岸勇輝 (2026). 『速さの最大が同じカムの曲線でも、圧力角を収めるピッチ円は、角が最大になる位置で変わる』 [論文961]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/961>
4. 山岸勇輝 (2026). 『カムの切り下げを避けるローラーの大きさは、圧力角と違い、減速の強さの順に決まる』 [論文967]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/967>
5. 山岸勇輝 (2026). 『カムの従動節をずらして得をするのは、戻りが持ち上げより遅いときだけである』 [論文972]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/972>
6. 山岸勇輝 (2026). 『平らな面の従動節は圧力角が 0 でも、凸の輪郭に要る基礎円は減速の強さで決まる』 [論文977]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/977>

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)