角度の型が中心への落下を防げるのは、中心の近くで引きつけるポテンシャルがちょうど 1/r² のときだけである

— 運動の項が二階の式では中心の近くの r^2V が物差しで、ちょうど $1/r^2$ のときだけ落ちる強さの境が角度の型とともに $(\ell+\tfrac{1}{2})^2$ へ上がり、三次元では回らない s にも 1/4 の壁が残る — 相対論のクーロンも、ポテンシャルの二乗を通して同じ形の境に入る — 分離子は、ポテンシャルの指数が 2 より小さいか、ちょうど 2 か、大きいか — [論文1108]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年11月
YOI: https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/1108

— *From thinking to syncing.* —

要旨

電子の雲の回り方（角度の型 ℓ）は、電子が中心へ落ちるのを防いでいるのか。量子力学の半径の式を、x＝ln r と、u＝rψ を r の 1/2 乗で割った f で書き直すと、距離の p 乗に反比例して引きつけるポテンシャル（強さ g）は、中心の近くで g と e の (2−p)x 乗の積の項になり、運動の項の $1/r^2$ との指数の比べ合いがそのまま見える（$\hbar^2/2m=1$）。p が 2 より小さいと、中心の近くでポテンシャルが運動の項に比べて弱くなって落ちず、2 より大きいとポテンシャルが勝って、角度の型がいくつでも落ちる。角度の型が効くのはちょうど p＝2 のときだけで、そこでは落ちるかどうかが強さの勝負になり、三次元の境は $g=(\ell+\frac{1}{2})^2$ である。物差しは中心の近くの r^2V で、運動の項が二階なので境目の指数が 2 になる。中心に半径 r0 の小さな壁を置いて r0 を細かくすると、水素（p＝1）の ℓ＝0・1・2 の一番下のエネルギーは $r0=10^{-6}$ で −0.999997・−0.250000・−0.111111（リュードベリ）に収まった。p＝3 では、r0 を 10^{-6} から 10^{-8} へ 100 分の 1 にしたとき、エネルギーの大きさが r0 の −3.0183 乗の形で増え、この冪は一段ごとに p へ近づき、エネルギーは壁の所のポテンシャルの深さへ近づいた。p＝2 で境の 0.1 下では、壁で打ち切る取り方で r0 を 10^{-16} まで細かくしても束縛状態は 0 個で、0.1 上では r0 を細かくするにつれて増えた。 古典の力学で、同じ形のポテンシャルで中心へ落ちる境は角運動量の二乗 L^2 である。L^2 に固有値 $\ell(\ell+1)$ を当てると、量子の境 $(\ell+\frac{1}{2})^2$ はどの ℓ でも 1/4 高く、そのあいだの強さでは、同じ角度の型の量子の状態は一つも落ちない。半古典の約束で L^2 に $(\ell+\frac{1}{2})^2$ を当てれば、二つの境は一致する。約束によらないのは、角運動量が 0 の s の状態でも三次元では強さ 1/4 までは落ちないことで、この値は d 次元では $((d-2)/2)^2$ になり、二次元では 0 になる。境の上では束縛状態が等比に並び、隣どうしのエネルギーの比は e の $2\pi/\nu$ 乗になる（ν は g と $(\ell+\frac{1}{2})^2$ の差の平方根）。ν に論文1060 の値 1.006237825103 を入れると、式のとおり 1060 と同じ比になり、溝を解いた比は式の 515.035001 と相対差 6.59×10^{-6} で合った。相対論では、核を点とみなすと、クーロンのポテンシャルの二乗が中心の近くで強さ $(Z\alpha)^2$ の $1/r^2$ のポテンシャルとして入り、中心の近くの標準の指数が実である範囲の上端は、クライン＝ゴルドンで $Z\alpha=\ell+\frac{1}{2}$（s で Z＝68.518）、ディラックで $Z\alpha=j+\frac{1}{2}$（j＝½ で Z＝137.036）になる。分離子は、ポテンシャルの指数が 2 より小さいか、ちょうど 2 か、大きいか、である。

キーワード：中心への落下、逆二乗のポテンシャル、角度の型、遠心力の壁、離散的なスケール不変性、クライン＝ゴルドン方程式、ディラック方程式、分離子。

本稿の射程（射程注記）：本稿は新しい定理も法則も主張しない。中心で $-g/r^2$ の形をとるポテンシャルの問題は、Case（1950）以来論じられてきた（Camblong らの引用による）。その境が D 次元で $(\ell+D/2-1)^2$ であること、3 次元の s で 1/4 であること、それより弱ければ原点で正則な束縛状態が無いこと、中心の打ち切りの下で境の上の準位が等比に並ぶことは、Camblong と Epele と Fanchiotti と Garcia Canal（2000）にある。彼らは、打ち切りとともに強さをくりこむと束縛状態は一つだけ残ると結論した。本稿が数えるのは、くりこむ前の塔である。ディラックの点のクーロン場で、束縛のエネルギーの標準の式が $Z\alpha$ が $j+\frac{1}{2}$ を超えると複素数になることは、Voronov と Gitman と Tyutin（2007）にある。彼らは脚注で、半径の成分の式が、原点に r の −2 乗の特異性を持つ有効なポテンシャルの非相対論の形になり、中心への落下と結びつけられると書いている。自己共役なハミルトニアンが一つに決まらないことは $Z\alpha$ が $j(j+1)$ の平方根を超えた所から始まっており、それと比べて $j+\frac{1}{2}$ で数学的に質的な変化は無いとも書き、核の大きさを入れると Z がおよそ 170 で電子と陽電子の対ができ、一つの粒の問題でなくなると書いた。半径の式の $\ell(\ell+1)$ を $(\ell+\frac{1}{2})^2$ に置きかえる形は、半古典の計算でランガーの修正（Langer 1937）として知られている。三次元の 1/4 は、ハーディの不等式の最良の定数 $((d-2)/2)^2$ の $d=3$ の値である。p が 2 より小さければ落ちず、大きければ落ちることは教科書の事実である。本稿は自己共役な拡張の選び方にも、くりこみにも入らず、中心に半径 r0 の壁を置いて r0 を小さくするだけである。本稿の束縛状態の数は、この壁で打ち切る取り方での数である。核の大きさを入れた臨界の Z の計算、多電子の遮蔽、三体の有効な引力は扱わない。電子の雲の形が原子の安定を作っているとも言わない。クーロンのポテンシャルでは、回っていない s の雲も落ちない。加えたのは、水素から $p=3$ までの数で角度の型が効くのが $p=2$ だけであることを示し、p が 2 より大きいとき一番下のエネルギーの冪が p に近づくことを数えたこと、三次元で強さが $\ell(\ell+1)$ と $(\ell+\frac{1}{2})^2$ のあいだでは同じ角度の型の束縛状態が 0 個であることを確かめたこと、相対論のクーロンの中心の近くの指数を表に並べ、クライン＝ゴルドンの 1s を数で解いて式と合わせたこと、境の上の比を溝を解いて式と合わせたこと、次元の表を並べたことである。 論文1096 の射程注記は、核は動かないとし、多電子原子の遮蔽、相対論の補正、核の大きさは入れないと書いた。本稿はその射程注記の隣に置き、相対論の補正のうち、点の核で中心の近くの標準の指数が実である Z の範囲の上端を、角度の型ごとに並べる。皮ごとの重さは数えず、多電子の遮蔽と核の大きさにも入らない。論文1060 の射程注記は、束縛の機構を導かない、なぜ三体で束縛が生じるのかは主題ではない、比の構造だけを見ると書いた。本稿はその射程注記の隣に置く。三体には入らず、境を越えた $1/r^2$ のポテンシャルで比だけが決まって位置が決まらない仕組みを、二つの粒の式で数える。

1. 雲の形は、落下を防いでいるか

電子の雲には、まん丸の s の形のほかに、ダンベルのような p の形、真ん中にドーナツを巻いた d の形がある。角度の型 ℓ が大きいほど、雲は中心から離れ、回る量（角運動量）を背負う。この形が、電子が中心へ落ちて原子がつぶれるのを防いでいるのではないか、という問いが本稿の出発点である。

答えは、引きつける力がどれだけ急かで分かれる。原子の電子を引くクーロンの力は距離の二乗に反比例し、そのポテンシャルは $-1/r$ である。この場合、回っていない s の雲も中心へ落ちない。s の雲でも落ちないので、雲の形が無くても原子はつぶれない。角度の型が落下を防ぐ役を持つのは、中心の近くで引きつけるポテンシャ

ルがちょうど $-1/r^2$（力は距離の三乗に反比例）のときだけである。そして重い原子の核を点とみなして相対論で扱うと、クーロンのポテンシャルの二乗が、中心の近くでちょうどこの形で効く。

体系では「逆二乗」をふつう力の意味で使ってきた。本稿で数える境目は、ポテンシャルの指数 2 である。力の指数で言えば 3 で、論文15 が古典の力学で中心への落下を表にした逆三乗の力に当たる。

2. x＝ln r に移すと、比べ合いが一つの項になる

単位を $\hbar^2/2m=1$ とする。角度の型 ℓ の状態の半径の式は、$u=r\psi$ について

$$-u''+\Big[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}+V(r)\Big]u=Eu$$

である。$x=\ln r$ とおき、$u=r^{1/2}f$ と書くと、$u''=r^{-3/2}(f_{xx}-f/4)$ なので、式は

$$-f_{xx}+\Big[\big(\ell+\tfrac12\big)^2+r^2V\Big]f=Er^2f$$

になる。$\ell(\ell+1)$ に $1/4$ が足されて $(\ell+\frac12)^2$ になった。この $1/4$ は、運動の項と体積の測り方 r^2 が合わさって出たもので、半古典の計算では、この置きかえはランガーの修正（Langer 1937）として知られている。引きつけるポテンシャルを $V=-g/r^p$ とすると、$r^2V=-ge^{(2-p)x}$ である。中心の近く（$x\to-\infty$）でこの項は、$p<2$ なら 0 へ消え、$p=2$ なら一定の $-g$ にとどまり、$p>2$ なら負の無限大へ下がる。

落ちるかどうかの物差しは、中心の近くでの r^2V である。ポテンシャルが純粋な冪でなくても、中心の近くで一番強く効く項が $-g/r^2$ なら、ここでの $p=2$ の話になる。境目の指数が 2 なのは、運動の項が二階だからである。強さがちょうど境のときは次に強い項が決めるが、本稿はそこを数えない。

x の座標で見ると、f は「中心の近くで高さ $(\ell+\frac12)^2-ge^{(2-p)x}$ の床の上を動く波」である。$p<2$ では、中心の近くの床は $(\ell+\frac12)^2$ という正の高さで、波は x の座標で中心の側へ減衰する。$p>2$ では、床はどこまでも下がり、角度の型の $(\ell+\frac12)^2$ は一定の高さなので、どこかで必ず負ける。ちょうど $p=2$ のときだけ、床は一定の高さ $(\ell+\frac12)^2-g$ で、その符号で決まる。正なら波は中心の側へ減衰し、負なら、中心へ向かって果てしなく続く平らな溝になる。溝の中では、中心の打ち切りを細かくするほど深い状態が増えていく。これが中心への落下である。本稿の「落下」は、中心に打ち切りを置いてそれを細かくしたときの見方である。

計算では、中心に半径 r_0 の壁を置き、外の半径 R との間で両端を $u=0$ とした。x の格子で式を三重対角の行列にし、重み r^2 が正なので、あるエネルギーより下の状態の数を、そのエネルギーを引いた行列の負のピボットの数（シルベスターの慣性法則）として数え、固有値を細かく挟んで出した。重み r^2 は何十桁にも広がるので、行列をそのまま対角化しない。確かめとして、水素（$V=-2/r$、リュードベリの単位、$r_0=10^{-6}$、$R=60$）の $\ell=0,1,2$ の一番下は -0.999997、-0.250000、-0.111111（式では -1、$-1/4$、$-1/9$）、$r_0=10^{-6}$ から 1 までの箱の自由な粒子は 9.869616（式では 9.869624）だった。

3. 指数の比べ合いの数

$p=1$（クーロン）と $p=1.5$ では $g=2$、$p=2.5$ と $p=3$ では $g=0.1$ として、r_0 を 10^{-2} から 10^{-8} まで細かくし、一番下のエネルギーを並べた（$R=400$）。

p	g	ℓ	$r_0=10^{-2}$	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}
1	2	0	-0.964214	-0.999602	-0.999997	-1
1	2	2	-0.111111	-0.111111	-0.111111	-0.111111
1.5	2	0	-2.79885	-4.71702	-4.77739	-4.77806
1.5	2	2	-0.00315273	-0.00315273	-0.00315273	-0.00315273
2.5	0.1	0	なし	-6.06447×10^{7}	-3.47026×10^{13}	-6.33791×10^{18}
2.5	0.1	2	なし	なし	-3.1372×10^{13}	-6.29103×10^{18}
3	0.1	0	-2388.68	-5.92051×10^{10}	-8.99329×10^{16}	-9.78581×10^{22}
3	0.1	2	なし	-5.87317×10^{10}	-8.99271×10^{16}	-9.78581×10^{22}

p が 2 より小さいと、一番下のエネルギーは r_0 を細かくしても収まる。$r_0=10^{-6}$ と 10^{-8} の差は、どの ℓ でも一番下のエネルギーの 1.4×10^{-4} 倍以下だった。p が 2 より大きいと、ポテンシャルの強さを 0.1 と小さくしても、一番下のエネルギーは r_0 とともに下がり続けた。$\ell=0$ で r_0 を 100 分の 1 にするごとの、エネルギーの大きさの増え方の冪は、$p=3$ で 3.6971、3.0908、3.0183、$p=2.5$ で 2.8788、2.6308（$r_0=10^{-2}$ では状態が無い）と、上から p に近づいた。一番下のエネルギーの大きさを、壁の所のポテンシャルの深さ g/r_0^{p} で割ると、$p=3$ で 0.0239、0.5921、0.8993、0.9786、$p=2.5$ で 0.0606、0.3470、0.6338 と 1 に近づく。一番下の状態は壁に寄り、壁の所の深さまで下がっていく。$\ell=2$ では落ち始める r_0 が小さくなるだけで、落下は止まらない。角度の型 $(\ell+\frac{1}{2})^2$ は一定の高さの壁で、$p>2$ のポテンシャルは中心の近くで必ずそれを越える（図 1）。

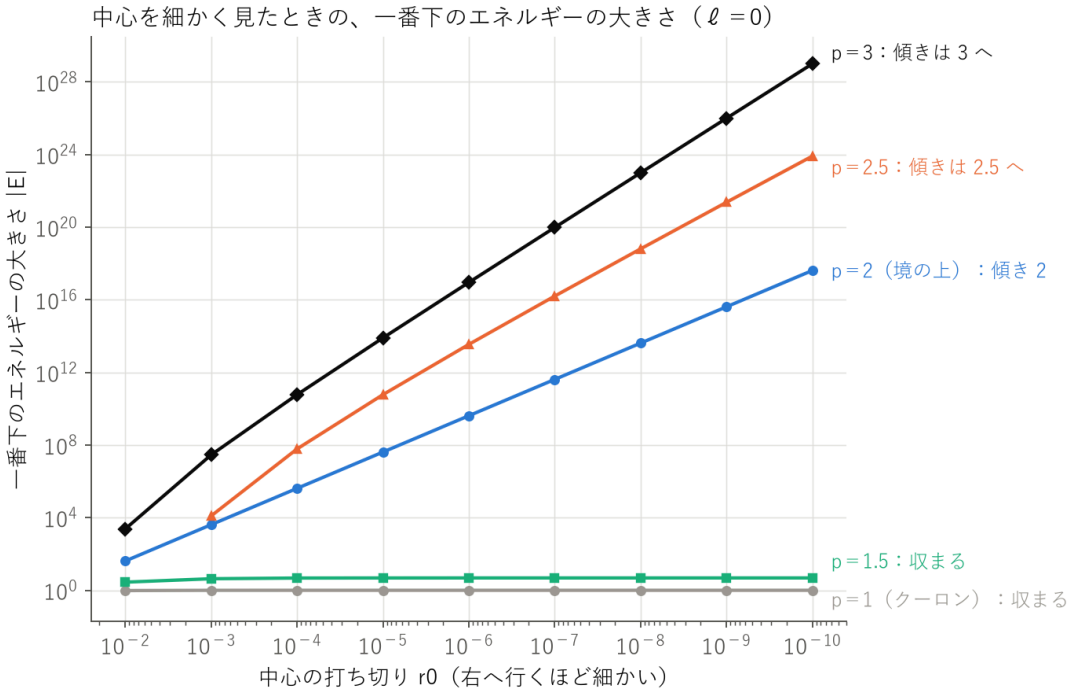


図1：中心に半径 r_0 の壁を置いて細かくしたときの、一番下のエネルギーの大きさ（$\ell=0$）。$p=1$ と 1.5 は収まり、$p=2$ と 2.5 と 3 は r_0 の冪で増え続け、傾きは p に近づく。$p=2$ だけはポテンシャルを $r<1$ に置き（強さ $g=1.25$ は境の上）、$R=1000$ で数えた。ほかは全体に置き、$R=400$ である。

4. ちょうど 1/r² では、強さの勝負になる

$p=2$ のポテンシャルを $r<1$ だけに置き（外では 0）、強さ g を境 $(\ell+\frac{1}{2})^2$ の 0.1 下と 0.1 上にして、r_0 を 10^{-4}、10^{-8}、10^{-12}、10^{-16} と細かくし、束縛状態の数を数えた（$R=1000$）。

ℓ	量子の境 $(\ell+\frac{1}{2})^2$	$\ell(\ell+1)$	境の 0.1 下の数	境の 0.1 上の数
0	0.25	0	0・0・0・0	1・2・2・3
1	2.25	2	0・0・0・0	0・1・2・3
2	6.25	6	0・0・0・0	0・1・2・3
3	12.25	12	0・0・0・0	0・1・2・3

境の下では、壁で打ち切る取り方で中心をどれだけ細かくしても、束縛状態は一つもできなかった。境の上では、r_0 を細かくするにつれて、$\ell=1$ から 3 では一つずつ、$\ell=0$ では 1、2、2、3 個と増えた。溝の深さは $g-(\ell+\frac{1}{2})^2=0.1$ で ℓ によらず、数の目安は r_0 を 1 万分の 1 にするごとに 0.9271 個である（$\nu=\sqrt{0.1}$ として $\ln(1/r_0)$ あたり ν/π 個）。一番下のエネルギーに r_0^2 を掛けると、r_0 が 10^{-8} 以下ではどの ℓ でも -3.197×10^{-9}

で一定だった（$\ell = 0$ の $r_0 = 10^{-4}$ では -2.561×10^{-9}）。ℓ によらないのは、溝が深さ 0.1 だけで決まるからである。一番下の状態は r_0 に比例する所にいて、そのエネルギーは $1/r_0^2$ で下がり続ける。角度の型 ℓ を一つ上げると、落ちるのに要る強さは $(\ell + \frac{1}{2})^2$ へ上がる。落下を防ぐ役を、角度の型が持つのはここである。

ただし、角度の型が守るのは、その型を持つ状態だけである。系全体が下に限りを持つかどうかは、一番低い型、三次元では s の境 $1/4$ だけで決まる。強さが $1/4$ と $9/4$ のあいだなら、p の状態は落ちないが s の状態が落ちるので、系としては落ちる。

5. 回らない s にも、三次元では 1/4 の壁がある

古典の力学で同じ形のポテンシャルを考える。角運動量 L の粒の有効なポテンシャルは $(L^2 - g)/r^2$ で、遠心力の項とポテンシャルの項が同じ $1/r^2$ で効く。論文15 はこの場合を、ランダウとリフシッツの『力学』が中心への落下として扱う古典の場合として表にし、L^2 が引力の強さより大きければ飛び去り、等しければどの半径でも中立、小さければ中心へ落ちると書いた。L^2 に量子の固有値 $\ell(\ell+1)$ を当てると、古典の境は $g = \ell(\ell+1)$ である。半古典の約束どおり L^2 に $(\ell + \frac{1}{2})^2$ を当てれば、古典の境は量子の境と一致する。どちらを当てるかは約束である。

量子の境 $(\ell + \frac{1}{2})^2$ は、どの ℓ でも $\ell(\ell+1)$ よりちょうど $1/4$ 高い。そのあいだの強さ $g = \ell(\ell+1) + \frac{1}{8}$（0.125、2.125、6.125、12.125）では、$r_0 = 10^{-16}$ まで細かくしても、同じ角度の型の束縛状態は一つも無かった。量子の境の $1/8$ 上（0.375、2.375、6.375、12.375）では 4 個ずつあった（図 2）。強さを 0.05 刻みで上げたとき、束縛状態が初めて現れたのは 0.30、2.30、6.30、12.30 だった（境の 0.25、2.25、6.25、12.25 のすぐ上）。

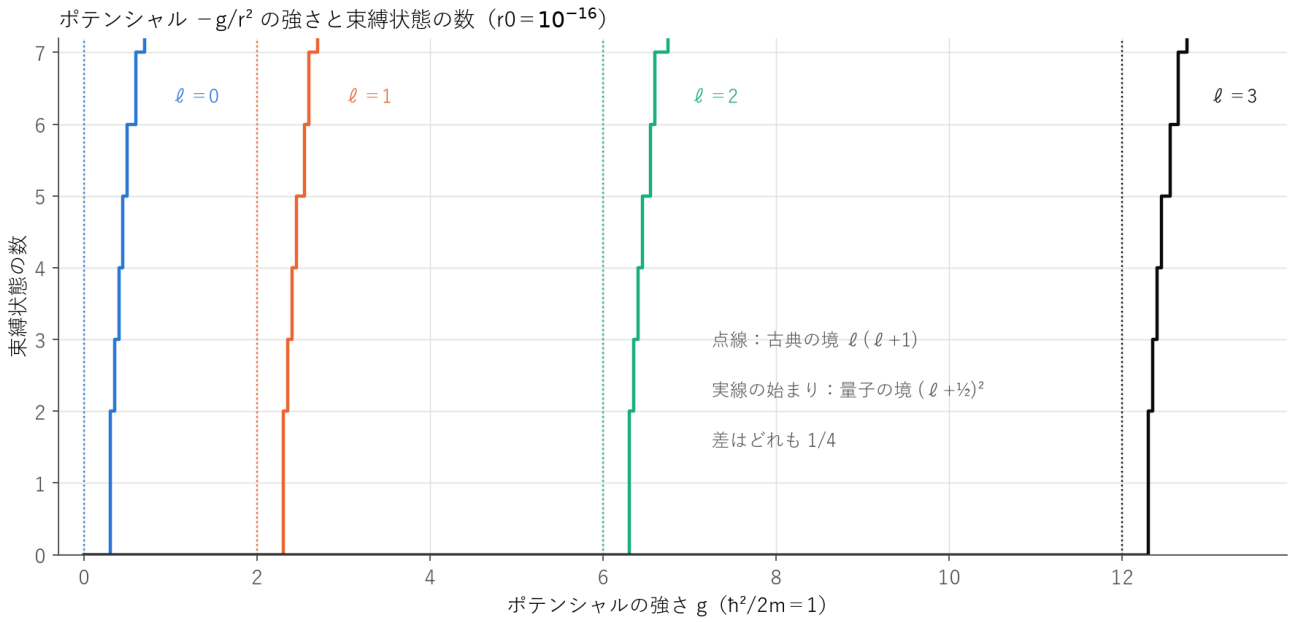


図2：引きつけるポテンシャル $-g/r^2$（$r < 1$）の強さ g と、束縛状態の数（$r_0 = 10^{-16}$）。点線は $\ell(\ell+1)$。段が立ち上がるのは量子の境 $(\ell + \frac{1}{2})^2$ のすぐ上で、差はどの ℓ でも $1/4$ である。

古典の粒は、回っていなければ（$L = 0$）どんなに弱い $-g/r^2$ のポテンシャルでも中心へ落ちる。三次元の量子の s の状態は、角運動量が 0 でも、強さ $1/4$ までは落ちない。こちらは L^2 に何を当てるかの約束によらない。この $1/4$ は、第2節で $u = r^{1/2} f$ と書き直したとき、運動の項と体積の測り方 r^2 が合わさって出たもので、d 次元では $((d-2)/2)^2$ になり、二次元では 0 である（第7節の表）。狭い所に閉じ込めると運動のエネルギーが上がることは二次元でも同じなので、この値は閉じ込めだけからは出ない。三次元の $1/4$ は、ハーディの不等式の最良の定数 $((d-2)/2)^2$ の $d = 3$ の値として知られている。Camblong ら（2000）は、三次元の境 $1/4$ が広い範囲の極性分子の実験の結果と合うと書いている。角度の型の壁は、その上に $\ell(\ell+1)$ を積む。

6. 境の上では、比だけが決まる

境の上では、強さを $g = (\ell + \frac{1}{2})^2 + \nu^2$ と書くと、溝の中の波は x について波の数 ν で振動する。x の向きに π/ν 進むごとに一つずつ状態ができ、隣どうしの状態の大きさの比は $e^{\pi/\nu}$、エネルギーの比は $e^{2\pi/\nu}$ になる。$1/r^2$ のポテンシャルだけの式は、長さを何倍にしても形が変わらない（拡大の対称性）。中心の打ち切りがこの対称性を壊し、残るのは一つの倍率だけである。Camblong ら（2000）は、打ち切りの下の準位を決める零点の式を書き、強さが境に近いときの近似として、この比の並びを書いた。そのうえで彼らは、打ち切りとともに強さを境へ近づけてくりこむと、束縛状態は一つだけ残ると結論した。本稿が数えるのは、くりこむ前の塔である。

$\nu = 1$（$g = 1.25$、$\ell = 0$、$r_0 = 10^{-24}$、$R = 10$）で深い順に六つの状態を出すと、隣どうしの比は 536.034871、535.489170、535.488153、535.488151、535.488151 と並んだ。式の $e^{2\pi} = 535.491656$ との相対差は 6.54×10^{-6} で、格子の刻みを半分にすると比は 535.490779、相対差は 1.64×10^{-6} と 4.00 分の 1 になった。差は刻みの二乗で縮む計算の誤差である。$\ell = 2$（$g = 7.25$）でも同じ比だった。束縛状態の数は $r_0 = 10^{-6}$、10^{-12}、10^{-18}、10^{-24} で 4、9、13、17 個で、$\ln(1/r_0)$ あたり 0.3137 個ずつ増えた（式では $\nu/\pi = 0.3183$）。

論文1060 は、一つの倍率しか持たない三つの粒の系で、長さの比 $e^{\pi/s}$（$s = 1.006237825103$）が 22.694382595、エネルギーの比が 515.035001 になることを、文献の式を解いて示し、どこから始まるかは式が決めないと書いた。本稿の溝で ν にこの s を入れると、式のとおり、長さの比 $e^{\pi/s}$ は 1060 と同じ 22.694382595、エネルギーの比 $e^{2\pi/s}$ は 515.035001 になる。これは作り方から決まる一致である。数で確かめたのは、溝を解いた比がこの式に合うことで、隣どうしのエネルギーの比は 515.577611、515.032668、515.031612、515.031610、515.031610 と並び、式との相対差は 6.59×10^{-6}、刻みを半分にすると 515.034153 で 1.65×10^{-6} だった。比を決めるのは ν だけで、一番深い状態がどこにいるかは打ち切り r_0 が決める。比だけが決まって位置が決まらない仕組みが、二つの粒の $1/r^2$ のポテンシャルの中にもある。

$\nu = 1$ の長さの比 $e^{\pi} = 23.140692633$ は、論文1046 で、ブラックホールの像の輪が半周ごとに細くなる比と同じ数である。$\nu = 1$ は本稿が選んだ値で、1046 の比は、曲がりの角が境への近さの対数に係数 1 で従うことから来る。論文300 の判定のとおり、数が同じだけでは同根としない。

7. 次元を動かす

d 次元では、$u = r^{(d-1)/2}\psi$ と $x = \ln r$ で、$(\ell + \frac{1}{2})^2$ が $(\ell + \frac{d-2}{2})^2$ に替わる。境の表を並べ、境の 0.1 下と 0.1 上で束縛状態を数えた（$r_0 = 10^{-16}$）。0.1 下はどれも 0 個（二次元の $\ell = 0$ は境が 0 なので下を数えない）、0.1 上は 3 個（二次元の $\ell = 0$ は 4 個）だった。

次元 d	$\ell = 0$	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$
2	0	1	4	9
3	0.25	2.25	6.25	12.25
4	1	4	9	16
5	2.25	6.25	12.25	20.25

二次元の s では境が 0 で、どんなに弱い $-g/r^2$ のポテンシャルでも落ちる。四次元では $(\ell+1)^2$ である。論文56の命題 5.2 は、引力のポテンシャル $-1/r^{d-2}$ が束縛の基底状態を持つのは $d \le 3$ で、$d \ge 4$ では中心への落下を免れないと書いた。四次元のこのポテンシャルは $-k/r^2$ で、ちょうど $p = 2$ に当たり、落ちるのは k が $(\ell+1)^2$ を超えるときである。それより弱ければ落ちないが、束縛状態も無い。どちらにしても安定な基底状態は無いので、命題の結論（三次元を求める）は変わらない。五次元より上では、このポテンシャルの指数 $d-2$ が 2 を超えるので、56 の言い方どおり落ちる。

論文1106 は、物理の無限大が、薄まる速さの指数と次元の比べ合いで決まることを示した。そこでの境目は指数が次元に等しい所だった。中心への落下の境目の指数は、次元によらず 2 である。この 2 は運動の項が二階であることから来て、論文1107 が外へ出る数を数えたときの二階と同じものである。次元が入るのは、境の強さ $(\ell + \frac{d-2}{2})^2$ の側だけである。運動の項が一階の式では事情が違い、ディラックの式ではクーロンの $-Z\alpha/r$ そのものが κ と競う（次の節）。

8. 相対論のクーロンは、境の上に入りうる

ここで、ふつうのクーロンの $-1/r$ が、中心の近くで $1/r^2$ の形を持ち込む場合を見る。核を点とみなし、単位を $\hbar = c = m = 1$、核の電荷を Z、微細構造定数を α とする（$\alpha^{-1} = 137.035999177$）。クライン＝ゴルドンの式では、エネルギー E とポテンシャル $-Z\alpha/r$ が $(E + Z\alpha/r)^2$ の形で入り、その中のクーロンのポテンシャルの二乗の項 $(Z\alpha)^2/r^2$ が、強さ $g = (Z\alpha)^2$ の $-g/r^2$ のポテンシャルとして働く。中心の近くで $u \sim r^s$ とおくと、$s(s-1) = \ell(\ell+1) - (Z\alpha)^2$ で、$s = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\ell+\frac{1}{2})^2 - (Z\alpha)^2}$ になる（sympy で確かめた）。根が実でなくなる境は $Z\alpha = \ell + \frac{1}{2}$ で、前の節までの境 $(\ell+\frac{1}{2})^2$ と同じ形である。ディラックの式は運動の項が一階で、$-Z\alpha/r$ が直接 κ と競う。二つの成分を $G \sim ar^s$、$F \sim br^s$ とおくと、行列式が $s^2 - \kappa^2 + (Z\alpha)^2$ になり、$s = \pm\sqrt{\kappa^2 - (Z\alpha)^2}$ である（$|\kappa| = j + \frac{1}{2}$）。境は $(Z\alpha)^2$ と $(j+\frac{1}{2})^2$ の比べ合いで、同じ形になる。

式	中心の近くの指数 s	境	境の Z
クライン＝ゴルドン	$\frac{1}{2} \pm \sqrt{(\ell+\frac{1}{2})^2 - (Z\alpha)^2}$	$Z\alpha = \ell + \frac{1}{2}$	68.518・205.554・342.590（$\ell = 0, 1, 2$）
ディラック	$\pm\sqrt{\kappa^2 - (Z\alpha)^2}$	$Z\alpha = \lvert\kappa\rvert = j + \frac{1}{2}$	137.036・274.072・411.108（$j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$）

クライン＝ゴルドンの 1s を、中心の近くの指数を入れた同じ数え方で数として解き、式 $E/m = [1 + (Z\alpha)^2/(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - (Z\alpha)^2})^2]^{-1/2}$ と比べた。$Z\alpha = 0.3$ では数で 0.948683、式で 0.948683、$Z\alpha = 0.45$ では数で 0.847324、式で 0.847316 だった。境の上の $Z\alpha = 0.6$ で、エネルギーを $E = 0.9$ に止めた式（$-2EZ\alpha/r$ も入れた全体の式）の固有値のうち、実の E で $E^2 - 1$ が取りうる下の端 -1 より下に来るものの数は、$r_0 = 10^{-4}$、10^{-8}、10^{-12}、10^{-16} で 1、2、3、4 個と増えた。これは束縛状態の数ではない。-1 より下の固有値はどの実の E とも合わないので、束縛状態にはならない。数えているのは、E を止めた式に残る強さ $(Z\alpha)^2 - \frac{1}{4} = 0.11$ の溝で、中心の近くでは E の選び方によらない。点の核のままでは、打ち切りの置き方で答えが動くことの目印である。

ディラックの点の核の 1s の標準の式 $E/m = \sqrt{1 - (Z\alpha)^2}$ は、$Z = 80$、100、120、137 で 0.811906、0.683730、0.482888、0.022920 で、$Z = 137.036$ を越えると実でなくなる。Voronov ら（2007）は、この式が $Z\alpha$ が $j + \frac{1}{2}$ を超えると複素数になることを確かめたうえで、自己共役なハミルトニアンが一つに決まらないことは $Z\alpha$ が $\sqrt{j(j+1)}$ を超えた所（$j = \frac{1}{2}$ で $Z = 118.677$）から始まっており、それと比べて $j + \frac{1}{2}$ で数学的に質的な変化は無いと書いた。拡張を選べば、$-m$ と m のあいだの準位は離散で、$E = m$ に集まるとも書いている。核の大きさを入れると、Z がおよそ 170 で一番下の準位が $-mc^2$ に届き、電子と陽電子の対ができるので、一つの粒の問題でなくなる（同じ論文の序論）。本稿は拡張の選び方にも核の大きさにも入らない。本稿が言うのは、中心の近くの標準の指数が実である Z の範囲の上端が、非相対論の $-g/r^2$ のポテンシャルの境と同じ形で、角度の型（クライン＝ゴルドンでは ℓ、ディラックでは j）ごとに決まることである。原子全体では、一番低い $j = \frac{1}{2}$ の型がこの上端を決め、高い j は自分の型の上端を上げるだけである。論文1096 は、電子の雲の皮ごとの重さを、相対論の補正を入れずに数えた。本稿は皮ごとの重さは数えず、その隣で、点の核の中心の近くの指数を角度の型ごとに並べる。

9. 分離子

論文79 は、ポテンシャル $-1/r$（力は逆二乗）が、回転より一段大きい隠れた対称性を持つことを書いた。本稿の $p = 2$ のポテンシャルが持つのは、長さを何倍にしても形が変わらない拡大の対称性である。前者では落ちる心配が無く、後者では強さの勝負になる。同じ「二乗」の名で呼ばれても、力の逆二乗（ポテンシャル $-1/r$）が持つのは回転より大きい対称性で、ポテンシャルの逆二乗が持つのは長さの拡大の対称性である。

分離子は、中心の近くのポテンシャルの指数が 2 より小さいか、ちょうど 2 か、大きいか、である。物差しは中心の近くの r^2V で、運動の項が二階なので境目が 2 になる。小さければ角度の型は落下に関わらず、大きけれ

ば角度の型は落下を止められない。ちょうど 2 のときだけ、強さが $(\ell + \frac{d-2}{2})^2$ を超えるかで分かれ、角度の型と次元がその境を決める。相対論のクーロンは、ポテンシャルの二乗の項を通してこの境に入る。

結び

電子の雲の形は、ふつうのクーロンのポテンシャルでは、原子がつぶれない理由ではない。回っていない s の雲も落ちないので、雲の形が無くても原子はつぶれない。中心へ落ちるかどうかを決めるのは、中心の近くの引きつけるポテンシャルの指数と、運動の項の指数 2 の比べ合いである。角度の型が落下を防げるのは、中心の近くで引きつけるポテンシャルがちょうど $1/r^2$ のときだけで、そこでは三次元の境が $(\ell+½)^2$ になる。角運動量が 0 の s にも、三次元では 1/4 の壁がある。境の上では比だけが決まる。相対論では、核を点とみなすとクーロンのポテンシャルの二乗が中心の近くでこの形を持ち込み、中心の近くの標準の指数が実である Z の範囲の上端を、角度の型ごとに決める。原子全体では j＝½ の型がそれを決める。

参考文献

1. Camblong, H. E., Epele, L. N., Fanchiotti, H., and Garcia Canal, C. A. (2000). Renormalization of the inverse square potential. *Physical Review Letters*.
2. Langer, R. E. (1937). On the connection formulas and the solutions of the wave equation. *Physical Review*.
3. Voronov, B. L., Gitman, D. M., and Tyutin, I. V. (2007). Dirac Hamiltonian with superstrong Coulomb field. *Theoretical and Mathematical Physics*.
4. 山岸勇輝 (2026). 『規約は数であって、配置の関数ではない』[論文15]. YOI: https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/15 ・ DOI: 10.5281/zenodo.21600352
5. 山岸勇輝 (2026). 『4π パッチの構造的考察』[論文56]. YOI: https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/56 ・ DOI: 10.5281/zenodo.21597500
6. 山岸勇輝 (2026). 『n=2 の隠れた対称性』[論文79]. YOI: https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/79 ・ DOI: 10.5281/zenodo.21732820
7. 山岸勇輝 (2026). 『三百本目の点呼 ── 同根か別根かは、判定できる』[論文300]. YOI: https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/300 ・ DOI: 10.5281/zenodo.22171914
8. 山岸勇輝 (2026). 『ブラックホールの影の縁は地平線ではなく、光が回れる円の像である』[論文1046]. YOI: https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/1046 ・ DOI: 10.5281/zenodo.22861257
9. 山岸勇輝 (2026). 『一つの倍率しか持たない系では、比だけが決まって位置は決まらない』[論文1060]. YOI: https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/1060 ・ DOI: 10.5281/zenodo.22915151
10. 山岸勇輝 (2026). 『電子の雲の皮ごとの重さは、局所の指数がちょうど 2 の半径で山になり、円の状態ではそれがボーアの半径 n^2 である』[論文1096]. YOI: https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/1096
11. 山岸勇輝 (2026). 『物理の無限大は、質量ではなく、薄まる速さと次元の比べ合いで決まる』[論文1106]. YOI: https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/1106

12. 山岸勇輝 (2026). 『場の方程式が二階なら、閉じた皮の外から読める中身は、角度の型ごとに一つの数である』[論文1107]. YOI: https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/1107

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)