平均ではまん丸の原子どうしも、揺らぎの片寄りが向きをそろえて、距離の 6 乗に反比例して引き合う

— 水素どうしの係数は、Mitroy と Bromley と同じ形のラゲールの基底でたどり直すと 13 桁で 6.4990267054 に合い、ロンドンの簡単な式は、分極率の多くが電離のエネルギーより下の 2p から来るぶん 1.168444 倍に出る — 6 は双極子の場の指数 3 の二倍で、d 次元では 2d — 分離子は、外から読む数を一つの原子の平均で取るか、二つの原子の揺らぎの掛け合わせで取るか — [論文1109]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年11月
YOI: https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/1109

— *From thinking to syncing.* —

要旨

殻が満杯の原子は平均ではまん丸で、閉じた皮の外へ出す数（多重極）は一つもない。それでも希ガスは冷やせば液体になる。本稿は、この引き合いが平均の形からではなく、揺らぎの片寄りどうしの掛け合わせから来ることを、水素とばねの模型で数える。水素の 1s では、平均の片寄り ⟨z⟩ は 0 だが、片寄りの二乗の平均 ⟨z²⟩ は ⟨r²⟩/3＝1（ボーア半径の二乗）である。ばねでつながった電荷を二つ並べた解ける模型（ħ＝m＝ω0＝1・分極率 α＝1）で、双極子どうしの結合の強さを κ＝α/R³ とすると、温度 0 の零点のエネルギーは、κ が小さいとき (3/4)κ²（ħω0 を単位に）だけ下がる。R＝10 で厳密な値とこの式の比は 1.000001、R を 10 から 20 にしたときの冪は −6.000001 である。平均の片寄りは 0 のままで、二つの片寄りは向きをそろえ、κ＝0.1 で相関の係数は、結ぶ線の向きに 0.1010（同じ向き）、横に −0.0501（逆向き）である。水素の p の部屋を Mitroy と Bromley（2005）と同じ形のラゲール型の基底で解き、擬似状態の和でたどり直すと、水素どうしの係数 C6 は基底 10 個で 6.4990267053304（その表の 10 個の列と 13 桁まで同じ）、20 個から先は 6.4990267054 で、表の最良の値と 13 桁で合った。ロンドンの簡単な式は、分極率を本当の 9/2 のまま、励起のエネルギーだけを電離のエネルギー I＝1/2 に置いて (3/4)Iα²＝7.593750 とし、本当の値の 1.168444 倍になる。本当の分極率のうち 0.657694 は I より下の 2p への遷移（ΔE＝3/8）から来るので、C6 に合う一本の線のエネルギーは 0.427919 と I より低く、比 1.168444 はちょうど I÷0.427919 である。 揺らぎの出どころを温度で分けると、自由エネルギーのずれは、kT が ħω0 よりずっと小さいとき零点の揺らぎで (3/4)κ²ħω0 だけ下がり、ずっと大きいとき熱の揺らぎで 3kTκ² だけ下がる。二つの近似の式が交わるのは kT＝ħω0/4 で、熱の上乗せが零点の分に並ぶのは kT＝0.490228ħω0 である。熱の揺らぎの引き合いは、内部エネルギーではなくエントロピーの項から来る（kT＝10 で ΔU/κ²＝−0.000017、ΔF/κ²＝−30.000049）。原子の ħω0 がハートリーの大きさなら、室温の kT はその 0.000950 倍で、遅れの効かない近さでは零点の揺らぎが勝つ。次元 d では双極子の場が距離の d 乗で弱まるので、ずれは d(d−1)κ²/8（係数は模型の置き方による）で、距離の冪は −2d（d＝2、3、4、5 で −4、−6、−8、−10）になる。三次元の 6 は 2×3 である。分散力が弱いのは小さい比 α/R³ の二乗で効くからで、実在の水素を 6 ボーア半径に置いても κ＝0.0208 である。分離子は、外から読む数を一つの原子の平均で取るか（一次・論文1107）、二つの原子の揺らぎの掛け合わせで取るか（二次）、である。

キーワード：分散力、ロンドン力、揺らぎ、零点のエネルギー、分極率、水素原子、次元、分離子。

本稿の射程（射程注記）：本稿は新しい定理も法則も主張しない。中性の原子どうしの、揺らぎによる引き合い（分散力）はロンドン（1930）による。ばねでつながった電荷を二つ並べた模型は、この力を見せる解ける模型として知られる。遠い距離で光の遅れが効くと、引き合いが距離の 7 乗に反比例するようになることは Casimir と Polder（1948）にある。水素どうしの C6 が、ラゲール型の基底の擬似状態の和で高い精度で求められることは Mitroy と Bromley（2005）にあり、本稿の C6 の計算は同じ形の基底でそれをたどり直したもので、新しい方法ではない。殻が満杯なら部屋を全部足した濃さがどの向きでも同じになることは、球面調和関数の加法定理（ウンゼルトの定理）として知られる。熱の揺らぎの極限の形は、有限温度の分散力の扱いの一部として知られていると考えられるが、本稿はその原典を確かめていないので、新しいとは言わない。水素は閉殻ではなく、近い所では電子の雲の重なりと交換が効いて結合や反発が生じる。本稿はその近い距離、遠い所の次の項（C8 から先）、遅れの効く遠い距離、ヘリウムやアルゴンなど実在の希ガスの係数、液体になる温度、三つ以上の原子の効果、向きを持つ分子の永久双極子の力（ケーソムやデバイの力）を扱わない。ばねの模型は κ が 1/2 に届く所（$R^3 = 2\alpha$）で崩れ、それより近い所は扱わない。加えたのは、平均では外へ何も出さない原子の引き合いが、一次の数ではなく揺らぎの掛け合わせという二次から来ることを、ばねの模型の厳密な解と水素の C6 のたどり直しで数えたこと、向きのそろい方（相関の係数）を数えたこと、ロンドンの簡単な式が大きく出る理由を 2p の寄与として数えたこと、揺らぎの出どころ（零点か熱か）で係数が分かれ、熱の引き合いがエントロピーの項から来ることを数えたこと、次元を動かして冪が −2d になることを確かめたことである。 論文278 の射程注記は、結合の機構を論じない、なぜイオン結合が強く、ファンデルワールス力が弱いのかは一切扱わないと書いた。本稿はその席に座る。ファンデルワールス力のうち分散力の弱さを、小さい比 α/R^3 の二乗として数える。永久双極子の力には入らない。論文673 の射程注記は、静電的な反発、ファンデルワールス引力、凝集は扱わないと書いた。本稿はその隣に置き、コロイドの粒には入らない。

1. まん丸の原子は、外へ何も出していないのか

電子の殻がちょうど半分か満杯のとき、同じ角度の型 ℓ の部屋を全部足した雲の濃さは、どの向きでも $(2\ell+1)/4\pi$ になり、雲はまん丸になる。論文1107 は、静電気のような二階の場では、閉じた皮の外から読めるのが角度の型ごとに一つの数であることを示した。まん丸の雲では、型 $\ell \geq 1$ の数は一つ残らず 0 である。ネオンやアルゴンのような希ガスの原子は、外から見て何も持っていない。

それでも希ガスは、冷やせば液体になる。何も出していない原子どうしが、なぜ引き合うのか。答えは、平均ではなく揺らぎにある。平均の片寄りは 0 でも、一瞬ごとの片寄りは 0 ではない。二つの原子の揺らぎが向きをそろえると、平均の数は 0 のままで、エネルギーが下がる。本稿はこれを、水素とばねの模型で数える。

2. 平均は 0、揺らぎは 0 でない

原子単位（長さはボーア半径、エネルギーはハートリー）で、水素の 1s の動径の波動関数は $u = 2re^{-r}$、雲の濃さは u^2 である。$\ell = 0$ なのでまん丸で、平均の片寄り $\langle z \rangle$ は 0、型 $\ell \geq 1$ の数も全部 0 である。ところが片寄

りの二乗の平均は $\langle z^2\rangle = \langle r^2\rangle/3$ で、$\langle r^2\rangle = 3$ なので 1 になる。量子力学では電子の居場所は決まっていないが、測れば、どこかへ片寄った所に見つかる。片寄りの揺らぎとは、この広がりのことで、絵で言えば、電子は一瞬ごとにどこかへ片寄っている。外から読める数は、その片寄りを平均した数である。

3. ばねでつながった電荷を二つ並べる

距離 R だけ離れた二つの中心に、電荷 q をばね（質量 m、振動数 ω_0）でつなぐ。一つの分極率は $\alpha = q^2/(m\omega_0^2)$ である（ガウス単位・原子単位で書く）。二つの片寄り $\mathbf{r}_A$ と $\mathbf{r}_B$ は、双極子どうしの力で結ばれる。結ぶ線を z の向きにとり、$\hbar = m = \omega_0 = 1$、$\alpha = 1$ とすると、

$$H = \sum_{i=A,B} \left(\tfrac{1}{2}\mathbf{p}_i^2 + \tfrac{1}{2}\mathbf{r}_i^2 \right) + \kappa\,(x_A x_B + y_A y_B - 2 z_A z_B), \qquad \kappa = \frac{\alpha}{R^3}$$

である。和と差の座標に分けると、振動の六つの型の振動数の二乗は、横の向きで $1 \pm \kappa$、結ぶ線の向きで $1 \pm 2\kappa$ になる。零点のエネルギーは

$$E_0 = \tfrac{1}{2}\left[2\sqrt{1+\kappa} + 2\sqrt{1-\kappa} + \sqrt{1+2\kappa} + \sqrt{1-2\kappa} \right]$$

で、結合の無いときの 3 からのずれ ΔE は、κ が小さいとき $-\tfrac{3}{4}\kappa^2$ になる。振動数の式と、6 行 6 列の行列の固有値の二通りで出し、$R = 1.5$、3、10 で差は 10^{-13} より小さかった。

R	$\kappa = \alpha/R^3$	ずれ ΔE	$\Delta E \div (-\tfrac{3}{4}\kappa^2)$
1.5	0.296296	$-7.2447236633 \times 10^{-2}$	1.100292
2	0.125	$-1.1895785260 \times 10^{-2}$	1.015107
3	0.037037	$-1.0301331438 \times 10^{-3}$	1.001289
5	0.008	$-4.8002880355 \times 10^{-5}$	1.000060
10	0.001	$-7.5000070313 \times 10^{-7}$	1.000001
20	0.000125	$-1.1718750172 \times 10^{-8}$	1.000000

$R = 10$ で比は 1.000001、R を 10 から 20 にしたときの冪は -6.000001 である。結びつきが崩れるのは $\kappa = 1/2$（$R^3 = 2\alpha$）で、模型はそれより近くを扱えない。ばねが古典の物なら、エネルギーの一番低い状態では二つとも止まっていて、片寄りも引き合いも 0 である。温度 0 では、引き合いは零点の揺れからだけ来る。

平均の片寄りは、結合があっても $\langle z_A\rangle = 0$ のままである。ところが掛け合わせは 0 でない。$\kappa = 0.1$ で $\langle z_A z_B\rangle = 0.051291$、横の向きでは $\langle x_A x_B\rangle = -0.025157$ である。結合のあるときの揺らぎ $\langle z_A^2\rangle = 0.507726$、$\langle x_A^2\rangle = 0.501889$ で割った相関の係数は、結ぶ線の向きで 0.1010（同じ向き）、横で -0.0501（逆向き）である

（結合の無いときの 0.5 で割ると 0.1026 と -0.0503）。零点の状態は正規分布なので、同じ向きに片寄って見つかる割合は $\frac{1}{2}+\arcsin(\rho)/\pi$ で、結ぶ線の向きで同じ向きが 0.5322、横で逆向きが 0.5160 になる。結ぶ線の上では片寄りが同じ向きに並び、横では逆向きに並ぶ。どちらも双極子どうしのエネルギーを下げる並び方である。外から一つずつ平均を取れば 0 だが、二つを掛け合わせると 0 でない。引き合いはそこから来る（図 1）。

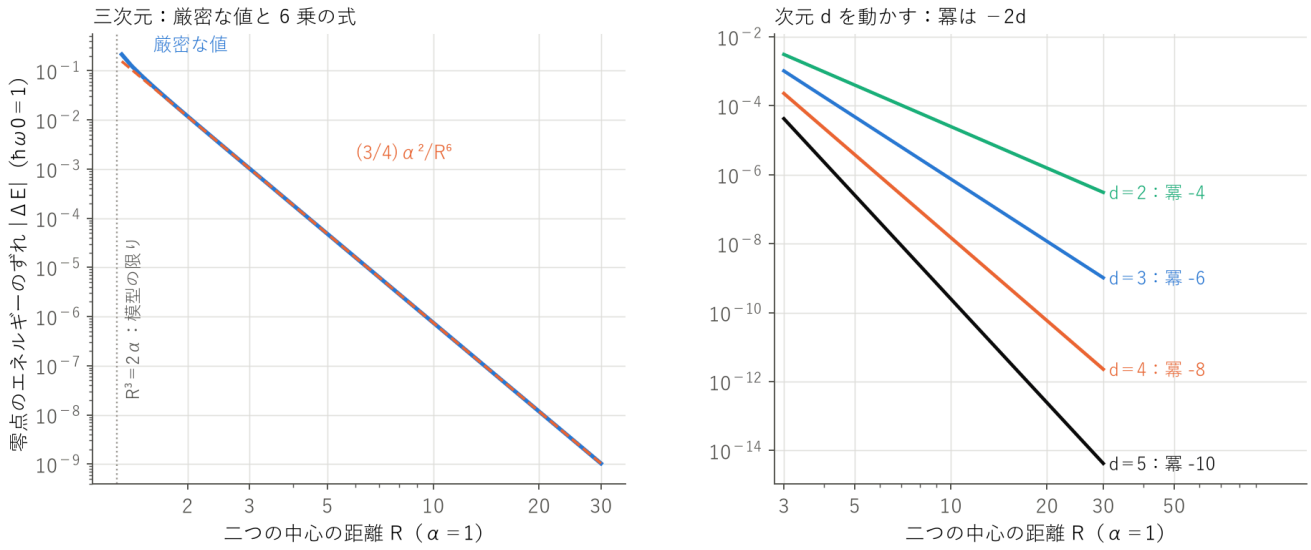


図1：ばねでつながった電荷を二つ並べたときの、零点のエネルギーのずれ $|\Delta E|$（$\hbar\omega_0=1$、$\alpha=1$）。左は三次元の厳密な値と $\frac{3}{4}\alpha^2/R^6$、右は次元 d を動かしたときで、冪は $-2d$ になる。

4. 水素どうしの係数を、たどり直す

水素どうしの引き合いは、遠い所で $-C_6/R^6$ になる。C_6 は、虚数の振動数での分極率 $\alpha(i\omega)$ の二乗の積分

$$C_6=\frac{3}{\pi}\int_0^\infty \alpha(i\omega)^2\,d\omega,\qquad \alpha(i\omega)=\sum_n \frac{f_n}{\Delta E_n^2+\omega^2}$$

で決まる。f_n は 1s から p の部屋への振動子強度、ΔE_n はそのエネルギーの差である。p の部屋（$\ell=1$）を、$r^2e^{-r}L_k^{(4)}(2r)$（$k=0,\dots,K-1$、L はラゲールの多項式）の基底で解き、束縛の準位と連続の部分をまとめて離散にした擬似状態の並びを作った。これは Mitroy と Bromley（2005）が水素の分散の係数に使ったのと同じ形の基底で、本稿の計算はそのたどり直しである。積分はガウス＝ラゲールの点で厳密に取れる。積分を閉じた形にすると $C_6=\frac{3}{2}\sum_{n,m} f_nf_m/(\Delta E_n\Delta E_m(\Delta E_n+\Delta E_m))$ である。

基底の数	一番下の p の準位	振動子強度の和	静的分極率	C_6
10	-0.1249999396	1.0000000000	4.5000000000	6.4990267053
20	-0.1250000000	1.0000000000	4.5000000000	6.4990267054
30	-0.1250000000	1.0000000000	4.5000000000	6.4990267054
40	-0.1250000000	1.0000000000	4.5000000000	6.4990267054

振動子強度の和の 1 と静的分極率の 9/2 は、z を掛けた 1s と一次の解がはじめから基底に入っているので、基底の作りから厳密に出る（基底 1 個で和は 1、分極率は 4.0、2 個で 4.5）。収まりを見るのは、一番下の p の準位と C_6 である。一番下の p の準位は基底 20 個から先で式の $-1/8$ に合う。C_6 は基底 10 個で 6.4990267053304 で、Mitroy と Bromley の表の 10 個の列（6.4990267053305）と 13 桁まで同じだった。20 個から先は 6.4990267054 で、同じ表の最良の値 6.4990267054058 との差は基底 20 個で 4.3×10^{-14}、40 個で 1.7×10^{-13} である。別の道として、$\alpha(i\omega)$ の二乗をガウス＝ルジャンドルの 400 点で数として積分しても 6.4990267054 だった。$\alpha(i\omega)$ は $\omega = 0$ で 4.500000、0.5 で 1.905388、1 で 0.742441、2 で 0.224474 と下がる。

ロンドンの簡単な式は、分極率を本当の $\alpha = 9/2$ のまま、励起のエネルギーだけを一つ（電離のエネルギー $I = 1/2$）に置いて $C_6 \approx \frac{3}{4} I \alpha^2$ とする。水素ではこれが 7.593750 で、正しい値の 1.168444 倍になる。大きく出るのは、本当の分極率の多くが I より下の遷移から来るからである。2p への遷移（$\Delta E = 3/8$、$f = 0.416197$）だけで分極率は 2.959621、9/2 の 0.657694 を占める。C_6 に合う一本の線のエネルギーは $C_6 / (\frac{3}{4}\alpha^2) = 0.427919$ で、I より低い。比 1.168444 は、ちょうど $I \div 0.427919$ である。

5. 揺らぎの出どころ：零点か熱か

ばねの模型を温度 T に置くと、自由エネルギーは振動の型ごとに $\frac{1}{2}\omega + kT \ln(1 - e^{-\omega/kT})$ の和である。$\kappa = 10^{-3}$ で、結合の無いときからのずれ ΔF を κ^2 で割った。

kT（$\hbar\omega_0 = 1$）	$\Delta F/\kappa^2$	熱の式 $-3kT$
0	-0.750001	0
0.01	-0.750001	-0.03
0.1	-0.750750	-0.3
0.25	-0.892020	-0.75
1	-3.003980	-3
10	-30.000049	-30
100	-300.000450	-300

kT が $\hbar\omega_0$ よりずっと小さいと $\Delta F/\kappa^2$ は零点の揺らぎの $-3/4$ に、ずっと大きいと熱の揺らぎの $-3kT$ に近づく。熱の揺らぎも、同じく距離の 6 乗に反比例して引き合う。出どころが違うのは係数で、二つの近似の式は $kT = \hbar\omega_0/4$ で交わる（図 2）。ただしそこで熱が上乗せする分は -0.142019 で、全体 -0.892019 の 0.1592 にすぎない。熱の上乗せが零点の分 $3/4$ に並ぶのは $kT = 0.490228\hbar\omega_0$ である。熱の揺らぎの引き合いは、内部エネルギーではなくエントロピーの項から来る。$kT = 1$ で $\Delta U/\kappa^2 = -0.015533$、$\Delta F/\kappa^2 = -3.003980$、$kT = 10$ で $\Delta U/\kappa^2 = -0.000017$、$\Delta F/\kappa^2 = -30.000049$ である。原子の $\hbar\omega_0$ をハートリーの大きさ（27.211386 eV）とすると、室温 300 K の $kT = 0.025852$ eV はその 0.000950 倍で、遅れの効かない近さでは、原子の電子の雲の引き合いは零点の揺らぎが決める。

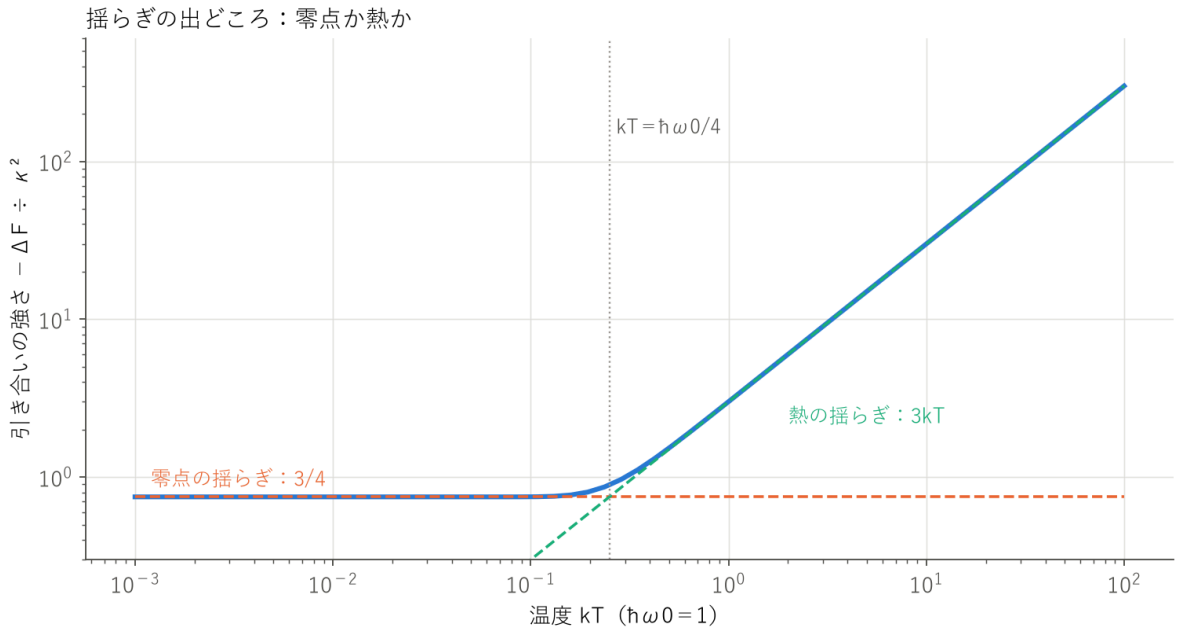


図2：ばねの模型の引き合いの強さ $-\Delta F/\kappa^2$ と温度 kT（$\hbar\omega_0 = 1$）。低い温度では零点の揺らぎの $3/4$、高い温度では熱の揺らぎの $3kT$ に近づき、$kT = \hbar\omega_0/4$ で二つの式が等しくなる。

6. 次元を動かす

d 次元では、電荷の場のポテンシャルが $1/R^{d-2}$（$d = 2$ では対数）、双極子のポテンシャルが $1/R^{d-1}$、双極子の場が $1/R^d$ で弱まる。双極子どうしの結合を $\kappa(\delta_{ij} - dn_i n_j)$、$\kappa = \alpha/R^d$ と置くと、結合の固有値は横の 1（$d-1$ 個）と結ぶ線の向きの $1-d$ で、振動数の二乗は $1 \pm \kappa$（$d-1$ 組）と $1 \pm (d-1)\kappa$（1 組）になる。ずれは κ が小さいとき $-d(d-1)\kappa^2/8$ である。係数の決め方は模型の置き方で、ここで確かめるのは冪と比である。

次元 d	$\Delta E \div (-d(d-1)\kappa^2/8)$	$R = 10 \to 20$ の冪	式の冪 $-2d$
2	1.000000	**−4.000042**	**−4**
3	1.000000	**−6.000001**	**−6**
4	1.000000	**−8.000000**	**−8**
5	1.000000	**−10.000000**	**−10**

κ が R^{-d} なので、ずれは R^{-2d} になる。三次元の 6 は、双極子の場の指数 3 が、二乗で二倍になったものである。論文1106 は、物理の無限大が薄まる速さの指数と次元の比べ合いで決まることを示した。ここでも指数は次元から来るが、引き合いの冪は次元の二倍で、二乗の分だけ倍になる。

7. ファンデルワールス力は、なぜ弱いのか

論文278 は、結合の分類を強さと温度で切り、ファンデルワールス力だけが室温の RT より弱いことを示した。その射程注記は、なぜ弱いのかを一切扱わないと書いた。本稿が答えるのは、ファンデルワールス力のうち分散力の弱さである（永久双極子の力には入らない）。本稿の数で言えば、弱い理由は二つの段にある。一つの原子の平均の片寄りは 0 なので、一次の引き合いは無い。残るのは二つの揺らぎの掛け合わせという二次で、小さい比 $\kappa = \alpha / R^3$ の二乗で効く。実在の水素（$\alpha = 4.5$）を 6 ボーア半径に置いても $\kappa = 0.0208$、8 ボーア半径なら 0.0088 である。ばねの模型で $\kappa = 0.1$ としても、ずれは $\hbar\omega_0$ の 0.007572 倍、一つの振動子の零点のエネルギー 1.5 の 0.005048 倍にすぎない。

論文1089 のレイリー散乱の断面積にも、分極率の二乗が入る。あちらは一つの粒の誘起された片寄りが光を出す量で、こちらは二つの原子の揺らぎを掛け合わせた量である。分極率 α は論文1097 でも局所の場とともに使った量で、同じ α が空の青と希ガスの引き合いの両方に入る。論文300 の判定のとおり、式に同じ α^2 が出るだけでは同根としない。

8. 分離子

分離子は、外から読む数を一つの原子の平均で取るか、二つの原子の揺らぎの掛け合わせで取るか、である。平均で取れば、まん丸の原子の数は全部 0 で、引き合いは無い。これは論文1107 が数えた一次の数である。掛け合わせで取れば 0 でなく、引き合いは κ^2、つまり距離の 6 乗に反比例して残る。もう一つの分け目は揺らぎの出どころで、零点か熱かで係数が $\frac{3}{4}\hbar\omega_0$ と $3kT$ に分かれ、二つの近似の式は $kT = \hbar\omega_0/4$ で交わる。熱の側の引き合いは、エントロピーの項から来る。

結び

殻が満杯の原子は、平均ではまん丸で、外へ何も出さない。それでも原子どうしは引き合う。引き合うのは平均の形ではなく、測れば片寄って見つかる電子の揺らぎが二つの原子で向きをそろえるからで、その強さは小さい比 α/R³ の二乗、つまり距離の 6 乗に反比例する。水素どうしの係数は、Mitroy と Bromley と同じ形の基底でたどり直して 6.4990267054 になり、ロンドンの簡単な式は、分極率の多くが電離のエネルギーより下の 2p から来るぶん 1.168444 倍に出る。揺らぎの出どころは原子では零点で、熱の上乗せが零点の分に並ぶのは kT が 0.490228ħω0 のときである。6 は双極子の場の指数 3 の二倍で、d 次元では 2d になる。分散力が弱いのは、一次が 0 で、二次しか残らないからである。

参考文献

1. Casimir, H. B. G., and Polder, D. (1948). The influence of retardation on the London-van der Waals forces. *Physical Review*.
2. London, F. (1930). Zur Theorie und Systematik der Molekularkräfte. *Zeitschrift für Physik*.

3. Mitroy, J., and Bromley, M. W. J. (2005). The higher-order C_n dispersion coefficients for hydrogen. *Physical Review A*.
4. 山岸勇輝 (2026).『「化学結合」の分類は、強さの連続体を温度で切っただけである』[論文278]. YOI: https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/278 ・ DOI: 10.5281/zenodo.22170205
5. 山岸勇輝 (2026).『三百本目の点呼 ── 同根か別根かは、判定できる』[論文300]. YOI: https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/300 ・ DOI: 10.5281/zenodo.22171914
6. 山岸勇輝 (2026).『「コロイド」は物質の名前ではなく、大きさの窓の名前である』[論文673]. YOI: https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/673 ・ DOI: 10.5281/zenodo.23014755
7. 山岸勇輝 (2026).『π と並ぶ 32・64・128 は、積分の出す小さな数に直径と波長の 2 の冪が掛かった数である』[論文1089]. YOI: https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/1089
8. 山岸勇輝 (2026).『格子に並べた双極子の場の和は足す形で決まり、球で 0、細い針で 4π/3、薄い板で −8π/3 になる』[論文1097]. YOI: https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/1097
9. 山岸勇輝 (2026).『物理の無限大は、質量ではなく、薄まる速さと次元の比べ合いで決まる』[論文1106]. YOI: https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/1106
10. 山岸勇輝 (2026).『場の方程式が二階なら、閉じた皮の外から読める中身は、角度の型ごとに一つの数である』[論文1107]. YOI: https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/1107

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)