4π質量相殺定理

── 逆二乗場における純粋立体角の出現と無摩擦平衡（Zero-Tension）の数理構造 ── [論文02]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年11月（第3版）

— From thinking to syncing. —

要旨

3次元ユークリッド空間で、密度が逆二乗則 $\rho(r) = 1/r^2$ に従う球の体積積分では、体積要素のヤコビアン r^2 と密度の $1/r^2$ が打ち消し合う。その結果、単位球の中の総質量は**3次元の全立体角 4π（ステラジアンの全角）に一致する**。これを「4π 質量相殺定理」として定式化する（定理1）。

同じ積分を一般の指数 n に広げると $m(n) = \frac{4\pi}{3-n}$ となり、**$n = 2$ は質量を立体角そのものに一致させる唯一の指数**である（第5節）。$m = 4\pi \cdot S$ と書いたときの $S = \frac{1}{3-n}$ を「4π の重なり枚数」と読むと、2π, 4π, 8π と進むモジュール階段が現れ、16π（積層）と $16\pi^2$（積）が別の生成規則に属することが見える。

本稿の射程（scope note）：本稿の定理は初等的な重積分であり、論文01の定理1（dm/dr が r によらないのは $n = 2$ だけ）と同じ事実を、積分の側から述べたものである。ここに現れる 4π は角度積分 $\int_{S^2} d\Omega$ そのもので、ガウスの法則・クーロンの法則・ポアソン方程式に現れる 4π と同じ立体角である（その共有は論文13）。$\rho = r^{-2}$ を密度として扱うには $[M/L]$ の次元をもつ定数 k を添えて $\rho = k/r^2$ と書くべきで、$m = 4\pi$ は $k = 1$・半径 1 という単位の選び方のもとでの値である。Zero-Tension は、面積の増え方と密度の減り方がちょうど釣り合うこの状態につけた体系の名前であり、摩擦や張力にあたる量を定義するものではない。第4節の Carr の著作との一致は、計算の系譜についての記述である。新しい物理法則は主張しない。**加えたのは**、同じ積分を一般の n に広げて $m(n) = 4\pi/(3-n)$ を得、$n = 2$ が質量を立体角そのものに一致させる唯一の指数であることを示したこと、そして $S = 1/(3-n)$ を「4π の重なり枚数」と読んで、16π（積層）と $16\pi^2$（積）を別の生成規則として分けたことである。

1. イントロダクション：構造的相殺への昇華

物理学や幾何学において、値 4π は球体の表面積 $S = 4\pi r^2$ やガウスの法則 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi q$ など至る所に現れ、式の中では定数として扱われることが多い。しかし3次元の逆二乗場 $\rho(r) = 1/r^2$ では、4π は、空間の広がりと減衰が打ち消し合ったあとに取り出される純粋な立体角そのものとして現れる。

2. 4π 質量相殺定理

定義 1（球座標系の体積要素）

直交座標 (x, y, z) から球座標 (r, θ, φ)（$r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$）への変換のヤコビアンにより、体積要素は $dV = r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\varphi$ である。

定理 1（4π 質量相殺定理）

3次元単位球 $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| \leq 1\}$ において、密度 $\rho(r) = r^{-2}$ をもつ場の総質量 m を計算するとき、動径 r への依存は完全に相殺され、総質量は純粋立体角 4π に一致する。

証明.

$$m = \iiint_\Omega \rho(\mathbf{x}) dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^1 \left(\frac{1}{r^2}\right) \cdot \left(r^2 \sin\theta\right) dr$$

ここで密度の $1/r^2$ とヤコビアンの r^2 が相殺される：

$$r^2 \cdot \frac{1}{r^2} = 1$$

変数が独立に分かれ、3つの1重積分の積となる：

$$m = \left(\int_0^1 1 \, dr\right) \cdot \left(\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi\right) = 1 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi$$

第3版で書き添える。定理1 が示しているのは、$\rho = r^{-2}$ の単位球という一つの定積分の値 4π である。第5節の一般の形 $m(n) = 4\pi/(3-n)$（$n < 3$）と、$n < 3$ の中で $m = 4\pi$ になるのは $n = 2$ だけであることは、動径の積分 $\int_0^1 r^{2-n} \, dr = 1/(3-n)$ から直ちに出るが、本稿では定理として立てていない。

3. 幾何学的解釈：スケール不変性

相殺 $r^2 \cdot (1/r^2) = 1$ は、被積分関数から**距離スケール r が落ちる**ことを意味する。すなわち $\rho = r^{-2}$ は、球面積の増大と密度の減衰がちょうど釣り合う**スケール不変な分布**である。

これは論文01の定理1（$dm/dr = 4\pi$ が r に依存しない）と同じ事実を、積分の側から見たものである。本体系では、この釣り合いの状態を Zero-Tension と呼ぶ。

4. G. S. Carr の多重積分論との接続

本定理で用いた多重積分の構造は、19世紀の数学者 G. S. Carr の『純粋数学要覧』（1886年）に収録された球座標の重積分と同じ形をしている。Carr の著作は、ラマヌジャンが独学に用いた本として知られる。

5. 一般の n における値：モジュール階段

本稿の計算を一般の指数 n について実行すると

$$m(n) = \int d\Omega \int_0^1 r^{2-n}\, dr = \frac{4\pi}{3-n} \qquad (n < 3)$$

となる。$m = 4\pi \cdot S$ と書けば $S = \dfrac{1}{3-n}$ であり、S を**4π の重なり枚数**と読むと次の階段が得られる。

n	$S = \frac{1}{3-n}$	m	読み
0	$1/3$	$4\pi/3$	単位球の体積
1	$1/2$	2π	4π の半分
2	1	4π	4π 1枚
$5/2$	2	8π	4π 2枚
$11/4$	4	16π	4π 4枚

$n = 2$ は、m が立体角そのものと一致する唯一の指数である（$S = 1$）。$2\pi,\ 4\pi,\ 8\pi$ は、論文13がモジュールとして扱う定数と一致する。

$16\pi^2$ はこの階段には乗らない。枚数で表すと $S = 16\pi^2/4\pi = 4\pi$ となり、**枚数自体が π を含む**からである。$16\pi = 4\pi \times 4$（積層）と $16\pi^2 = 4\pi \times 4\pi$（積）は**生成規則が異なる**。

6. 結論

本稿は次を示した。

1. 逆二乗密度 $\rho = r^{-2}$ の単位球では、ヤコビアンの r^2 と密度の $1/r^2$ が相殺し、総質量が**全立体角 4π と一致する**。
2. 一般には $m(n) = \frac{4\pi}{3-n}$ であり、$n = 2$ は m が立体角そのものと一致する**唯一の指数**である。

結び：$n = 2$ が特別なのは、動径の積分の値をちょうど 1 にする唯一の指数だからであり、そのとき質量には角度の積分 4π だけが残る。広がりと減衰の釣り合いが、立体角をむき出しにする。

改訂記録

> **第3版（2026年11月）**：定理1 の身分を書き添えた。定理1 が示すのは一つの定積分の値であり、一般の形 $m(n) = 4\pi/(3-n)$ と $n = 2$ の唯一性は式から直ちに出るが定理として立てていない、と定理の直後に書いた。あわせて本文の長い横棒を、句点・読点・括弧に言い換え、関所の決まりに合わせて結びの段に見出しを付けた。題・副題と数は変えていない。
>
> **第2版（2026年9月）**：書式を現行の型に揃えた。要旨と結論に分かれていた位置づけ・単位系・Zero-Tension の語・Carr についての注記を、要旨の直後の射程注記にまとめた。参考文献に既刊の DOI を付け、自分自身を引いていた項目を外した。参考文献の Carr (1886) と Kanigel (1991) の出版社を、引いた版のものに正した。

参考文献

1. Carr, G. S. (1886). *A Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics*. Francis Hodgson, London.
2. Kanigel, R. (1991). *The Man Who Knew Infinity: A Life of the Genius Ramanujan*. Charles Scribner’s Sons.
3. 山岸勇輝 (2026). *球対称密度分布における $n = 2$ の唯一性定理* [論文01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
4. 山岸勇輝 (2026). *宇宙OS記述言語としての物理法則* [論文13]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404917

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)